ALGORITMO

matemáticas

3 secundaria

José R. Vizmanos
Máximo Anzola

sm

sm

sm

ALGORITMO

matemáticas

3

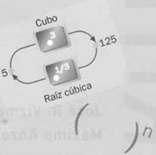
secundaria

José R. Vizmanos
Máximo Anzola

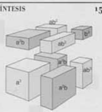
sm

índice

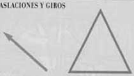
Números

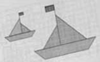


Álgebra

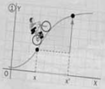


Geometría





Funciones



$y=f(x)$

Estadística

Números fraccionarios o racionales

1

Los colmados eran, y siguen siendo en algunas regiones, tiendas en las que se vende prácticamente de todo. Guardan un sabor antiguo donde el tendero maneja medidas antiguas y modernas. En la venta de los diferentes artículos aparecen muchas expresiones que son números fraccionarios; por ejemplo, una botella de vino de $\frac{3}{4}$, medio metro de tela, cuarto de jamón, cuarto y mitad de queso.

En los objetos de plata, el tendero habla de 900 milésimas (900 partes de plata de 1 000), y en los de oro de 18 quilates (18 partes de oro de 24).

La idea esencial de fracción es siempre la misma: partes que se eligen de aquellas en que se ha dividido la unidad.

1 Unidad fraccionaria. Fracciones

Unidades fraccionarias

Observa la figura del margen. Un pincho de tortilla es cada una de las partes iguales en que se divide la tortilla.

Las expresiones mitad, $\frac{1}{2}$; tercera parte, $\frac{1}{3}$; cuarta parte, $\frac{1}{4}$; sexta parte, $\frac{1}{6}$, etcétera, que se utilizan en la vida real son *unidades fraccionarias*.

> La **unidad fraccionaria**, $\frac{1}{n}$, es cada una de las partes que se obtienen al dividir la unidad en n partes iguales.

Fracciones

Si la unidad fraccionaria es, por ejemplo, $\frac{1}{7}$, y tomamos 2, 3, 4, ..., m unidades fraccionarias como esta, las expresiones $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, ..., \frac{m}{7}$ se llaman **fracciones**.

> La fracción $\frac{m}{n}$ es el cociente indicado de dos números enteros, siendo el divisor distinto de cero.
> - n indica el número de partes en que se ha dividido la unidad.
> - m indica el número de unidades fraccionarias elegidas.
>
> El dividendo se llama también **numerador**, y el divisor, **denominador**.

Extensión del concepto de fracción

La idea de fracción es también aplicable a otras situaciones de la vida real. Si decimos que 3 de cada 5 estudiantes de un instituto son chicas estamos dando la fracción $\frac{3}{5}$, ya que si dividimos el centro en cinco partes, tres serían de chicas. Por tanto, la **proporcionalidad** «3 de cada 5» designa también una fracción.

Los **porcentajes** son también otra forma de expresar una fracción. Por ejemplo, si decimos que un artículo está rebajado un 25 %, significa que de cada 100 euros que marca nos rebajan 25, es decir, 25 de cada 100.

Javier ha pagado los $\frac{3}{5}$ de una compra que ha costado 200 euros y su hermana Irache lo restante. ¿Cuánto ha pagado su hermana? Irache tiene que pagar los $\frac{2}{5}$, que se calculan así:

$$\frac{2}{5} \text{ de 200 euros es igual a } \frac{2}{5} \cdot 200 = 80 \text{ euros}$$

Aquí la fracción $\frac{2}{5}$ actúa como un **operador** o **factor**.

UNIDADES FRACCIONARIAS

Cada pincho es una unidad fraccionaria. Según sea el denominador, el pincho de tortilla será mayor o menor.

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{8}, ...$

LAS PROPORCIONES DE LEONARDO DA VINCI

El gran artista italiano Leonardo da Vinci (1452-1519) estudió las proporciones del cuerpo humano. Algunas de las que estableció son las siguientes:

Nariz a boca $= \frac{1}{7}$ del rostro.

Boca a mentón $= \frac{1}{4}$ del rostro.

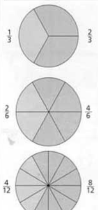
Medida de la nariz $= \frac{1}{3}$ del rostro.

Medida de la oreja $= \frac{1}{3}$ del rostro.

Altura hombre arrodillado $= \frac{3}{4}$ de la altural total.

2 Fracciones iguales. Números racionales

FRACCIONES EQUIVALENTES



Fracciones iguales o equivalentes

En las figuras del margen los sectores de igual color son iguales a pesar de las sucesivas divisiones. Estas fracciones determinan el mismo número. Se dice que son iguales o equivalentes.

Eligiendo dos fracciones equivalentes, por ejemplo, $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$, se observa que los productos cruzados son iguales: $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$

> Dos fracciones son iguales cuando el producto de extremos es igual al producto de medios.
>
> $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad a\,d = b\,c$$
>
> a y d son los extremos; b y c, los medios.

La fracción $\frac{2}{3}$ es igual a $\frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15}$, ya que $2 \cdot 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 \cdot 2$

Por la misma razón, la siguiente regla permite obtener fracciones iguales a una dada.

> Si se multiplica o divide el numerador y denominador de una fracción por un número entero distinto de cero, se obtiene otra fracción igual a la dada.
>
> $$\frac{a}{b} = \frac{a\,k}{b\,k}$$

Simplificar una fracción es dividir numerador y denominador de la fracción por el mismo número entero.

Una fracción es **irreducible** cuando numerador y denominador no pueden dividirse a la vez por un mismo número entero distinto de 1 o −1.

Por ejemplo, $\frac{3}{7}, \frac{5}{9}, \frac{13}{12}$, ... son fracciones irreducibles.

SUCESIVAS AMPLIACIONES DE LOS NÚMEROS

$N \subset Z \subset Q$

Números fraccionarios o racionales

Todas las fracciones iguales a una dada determinan un mismo número.

Por ejemplo, $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$, ... determinan el mismo número: **un tercio**.

Los números determinados por fracciones se llaman **números racionales**.

El conjunto de los números racionales se simboliza por **Q**.

Número fraccionario, fracción y **número racional** se utilizan en la práctica como sinónimos.

3 Reducción de fracciones a común denominador. Comparación

Reducir dos fracciones, $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$, a **común denominador** es hallar otras fracciones, iguales a las primeras, que tengan el mismo denominador.

El denominador común puede ser cualquier número que sea a la vez múltiplo de 4 y de 6; por ejemplo: 12, 24, 36, 48, ...

Si el denominador es 24: $\frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6}, \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4}$, y operando: $\frac{18}{24}, \frac{20}{24}$

El **denominador común** puede ser un múltiplo cualquiera de los denominadores y en particular:

— el producto de los denominadores, o

— el mínimo común múltiplo de los denominadores: m.c.m.

El **nuevo numerador** de cada fracción se obtiene multiplicando el numerador antiguo por el mismo número por el que se ha multiplicado el denominador correspondiente.

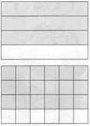
Utilizando el producto de los denominadores se obtiene la siguiente regla:

Para reducir dos o más fracciones a común denominador basta multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el producto de los denominadores de la otras:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\,d}{b\,d}, \frac{c\,b}{d\,b}$$

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\,df}{b\,df}, \frac{c\,bf}{d\,bf}, \frac{e\,bd}{f\,bd}$$

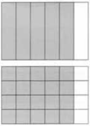
$\frac{3}{4}$



$=$

$\frac{18}{24}$

$\frac{5}{6}$



$=$

$\frac{20}{24}$

La reducción a común denominador permite comparar y ordenar fracciones.

Por ejemplo, dadas las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{7}$ se tiene que: $\frac{2}{3} = \frac{14}{21} > \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

De dos fracciones que tienen el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Reducir a común denominador y ordenar estas fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$

Si el denominador común es $48 = 2 \cdot 4 \cdot 6$, las fracciones son:

$\frac{24}{48}, \frac{36}{48}, \frac{40}{48}$ Como $\frac{24}{48} < \frac{36}{48} < \frac{40}{48}$, resulta: $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

2 Reducir a común denominador y ordenar estas fracciones: $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{15}$

Si el denominador común es 30 = m.c.m. (2, 5, 15), las fracciones son:

$\frac{15}{30}, \frac{18}{30}, \frac{14}{30}$ Como $\frac{14}{30} < \frac{15}{30} < \frac{18}{30}$, resulta: $\frac{7}{15} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

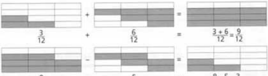
4 Suma y diferencia de fracciones

La suma de $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{7}$ de tarta, ¿cuánto es?

Dos séptimos de tarta más tres séptimos de tarta es igual a cinco séptimos de tarta.

Escribimos: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$

En las siguientes figuras sumamos y restamos números racionales expresados en las mismas unidades fraccionarias, es decir, que tienen el mismo denominador. Cada número fraccionario indica una parte del rectángulo (recinto coloreado).



$$\frac{3}{12} + \frac{6}{12} = \frac{3+6}{12}=\frac{9}{12}$$

$$\frac{8}{12} - \frac{5}{12} = \frac{8-5}{12}=\frac{3}{12}$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$$

Este proceso se generaliza en la siguiente definición:

La suma o diferencia de dos fracciones que tienen igual denominador es otra fracción que tiene:

- **por numerador, la suma o diferencia de los numeradores, y**
- **por denominador, el común.**

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\,d\pm c\,b}{b\,d}$$

Si las fracciones tienen distinto denominador se reducen previamente a común denominador.

Si se trata de sumar números fraccionarios y enteros, estos se expresan previamente en forma fraccionaria.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 $\frac{7}{6}-\frac{9}{2}=\frac{7}{6}-\frac{27}{6}=\frac{-20}{6}=\frac{-10}{3}$

4 $\frac{5}{3}+\frac{4}{7}=\frac{5\cdot7}{3\cdot7}+\frac{4\cdot3}{7\cdot3}=\frac{35}{21}+\frac{12}{21}=\frac{47}{21}$

5 $5-\frac{7}{3}=\frac{15}{3}-\frac{7}{3}=\frac{8}{3}$

6 $\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{7}{5}=\frac{15}{60}-\frac{40}{60}+\frac{84}{60}=\frac{15-40+84}{60}=\frac{59}{60}$

REGLA DE LOS SIGNOS

Número / Operación	+	−
+	+	−
−	−	+

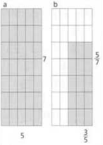
Observa que un signo es de operación y el otro indica si el número es positivo o negativo.

5 Producto y cociente de fracciones

El producto de números enteros positivos se puede interpretar como el área de un rectángulo. En la figura a el rectángulo mide 7 cm de largo y 5 cm de ancho. Su área vale $7 \cdot 5 = 35$ cm².

En la figura b consideramos cada lado como una unidad, luego los lados del rectángulo coloreado miden $\frac{5}{7}$ de largo y $\frac{3}{5}$ de ancho y su área medirá $\frac{15}{35}$. Esta interpretación del área permite escribir la relación

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35}$$



Teniendo en cuenta este resultado, se da la siguiente definición de producto:

El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene:
- **por numerador, el producto de los numeradores, y**
- **por denominador, el producto de los denominadores.**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Dividir un número por 2 equivale a multiplicar por el número inverso: $\frac{1}{2}$; análogamente, dividir un número por $\frac{2}{3}$ equivale a multiplicar por el número inverso: $\frac{3}{2}$. Por tanto, **para dividir dos fracciones se multiplica la primera por la inversa de la segunda**:

$$\frac{11}{7} : \frac{2}{3} = \frac{11}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{11 \cdot 3}{7 \cdot 2} = \frac{33}{14}$$

El cociente de dos fracciones es otra fracción que tiene:
- **por numerador, el producto de los extremos, y**
- **por denominador, el producto de los medios.**

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Si se trata de multiplicar o dividir números fraccionarios y enteros, estos se expresan previamente en forma fraccionaria.

Ejercicios resueltos

7 $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

8 $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{9} = \frac{60}{189}$

9 $\frac{2}{6} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{-6}{12} = -\frac{6}{12}$

10 $\frac{2}{15} : 5 = \frac{2}{15} : \frac{5}{1} = \frac{2}{75}$

11 $\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{10}{21}$

12 $\frac{4}{7} : \frac{-3}{5} = \frac{20}{-21} = -\frac{20}{21}$

REGLA DE LOS SIGNOS PRODUCTO COCIENTE

Número \ Número	+	−
+	+	−
−	−	+

Observa que los signos indican si los números son positivos o negativos.

6 Propiedades y jerarquía de las operaciones

$$(4-2)7-3\cdot 5^2$$
$$2\cdot 7-3\cdot 25$$
$$14-75$$
$$-61$$

El cálculo de una cadena de operaciones requiere conocer las propiedades de las operaciones y el orden de realización. Veamos un ejemplo:

$$A = 7\cdot 5 - [-(8-3) + (12-6)] + 5 + 4^2 : 8$$

Lo primero que hay que hacer es interpretar el orden en que se realizan las operaciones utilizando (o imaginando) paréntesis (o corchetes). Las primeras veces conviene escribirlos. Fuera de los paréntesis solo deben quedar los signos + o −.

$$A = (7\cdot 5) - [-(8-3) + (12-6)] + 5 + (4^2 : 8)$$

A continuación se realizan las operaciones entre paréntesis:

$$A = 35 - [-5 + 6] + 5 + 2 = 35 - 1 + 5 + 2$$

Por último se hacen las sumas y las restas:

$$A = 34 + 5 + 2 = 39 + 2 = 41$$

a) En los cálculos numéricos deben realizarse primero las operaciones que están entre paréntesis reales o imaginarios. Si hay paréntesis anidados (unos dentro de otros), se opera desde las parejas interiores a las exteriores.

b) Cuando no hay paréntesis, el orden en que se deben realizar las operaciones es el siguiente:

1.° Potenciación y radicación.

2.° Multiplicación y división.

3.° Suma y resta.

A igualdad de orden tiene preferencia la operación que se encuentra más a la izquierda.

El cálculo correcto con números exige conocer y saber utilizar las propiedades de las operaciones. Las propiedades de la suma y del producto son:

Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Conmutativa	$a + b = b + a$
Asociativa	$(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$
Conmutativa	$a\,b = b\,a$
Distributiva	$a(b + c) = a\,b + a\,c$

EJERCICIOS RESUELTOS

13 $\frac{5}{2} - \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5} = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}\right) = \frac{5}{2} - \frac{12}{35} = \frac{175-24}{70} = \frac{151}{70}$

14 $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{20-18}{15} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{15}$

15 $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3} : \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{2} + \frac{10}{9} = \frac{27+20}{18} = \frac{47}{18}$

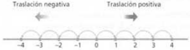
¿SABÍAS QUE...?

Los signos de la multiplicación × y de la división : fueron introducidos por William Oughtred (1574-1660) en el año 1657.

En 1659, en el *Álgebra alemana*, de Jhoan Rahn, aparece el signo ÷ para indicar la división.

7 Representación de números racionales. Recta racional

Los **números enteros** se pueden representar en una recta, tal como se hace en la siguiente figura:



Para fijarlos se necesitan dos puntos:

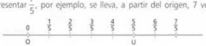
- El **punto origen** O, al que se le asocia el número **0**.
- El **punto unidad** U, al que se le asocia el número **1**.

Los números enteros se representan llevando el segmento OU hacia la derecha (+) o hacia la izquierda (−) tantas veces como indica el número.

Esta recta se amplía representando los **números racionales**. Para ello basta saber representar las unidades fraccionarias:

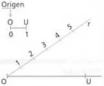
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

En el margen se indica cómo se divide la unidad OU en 5 partes iguales. Para representar $\frac{7}{5}$, por ejemplo, se lleva, a partir del origen, 7 veces $\frac{1}{5}$.

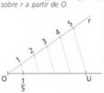


Del mismo modo se asigna a cada número racional un punto de la recta.

División de la unidad en cinco partes iguales.



Se traza una recta r por O. Se llevan 5 segmentos iguales sobre r a partir de O.



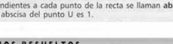
Se une el punto 5 con U. Se trazan paralelas a esta recta. Los segmentos determinados en OU son iguales.

> Los números correspondientes a cada punto de la recta se llaman **abscisas**. Por ejemplo, la abscisa del punto U es 1.

EJERCICIOS RESUELTOS

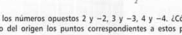
16 **Dibujar los puntos de abscisa $x = 4$, $x = -3$, $x = \frac{3}{2}$**

Los puntos son:



17 **Dibujar los números opuestos 2 y −2, 3 y −3, 4 y −4. ¿Cómo son respecto del origen los puntos correspondientes a estos pares de abscisas?**

La gráfica es:



Los pares de puntos correspondientes a números opuestos son simétricos respecto del origen.

Para resolver un problema...

Utilizar el método de reducción a la unidad:

- Hacer un dibujo o esquema que designe la unidad.
- Identificar en el dibujo cada fracción de la unidad.
- Dibujar la fracción de la unidad que relaciona los datos.

PROBLEMA

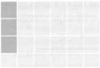
Un pintor pinta un garaje en 8 horas, y su hijo, en 12 horas. Si padre e hijo trabajan juntos, ¿cuánto tardarán?

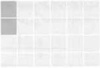
HACER UN DIBUJO

- Consideramos la pared que se debe pintar como una unidad. Entonces el padre pinta en cada hora $\frac{1}{8}$ de esa unidad.

  El dibujo de la izquierda representa la pared del garaje y en él está marcada la parte que pinta el padre en una hora.

  Padre: $\frac{1}{8} = \frac{3}{24}$ Hijo: $\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$





  Del mismo modo, el hijo pinta cada hora $\frac{1}{12}$ de la pared, tal como está marcado en el dibujo de la derecha.

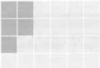
  Si trabajan conjuntamente, en una hora pintarán la suma de esas dos partes. Para poder sumarlas debemos utilizar la misma división de la pared: escribir las fracciones con el mismo denominador.

RELACIÓN E INTERPRETACIÓN

- Parte de garaje que pintan padre e hijo en una hora:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{3}{24} + \frac{2}{24} = \frac{5}{24}$$

  que es la parte de pared representada en la figura.



LA SOLUCIÓN

- En una hora, trabajando los dos a la vez, pintan 5 de las 24 partes en que está dividida la pared. Para pintar las 24 partes deberán dedicar:

$$24 : 5 = \frac{24}{5} \text{ horas} = 4 \text{ h } 48 \text{ min}$$

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Expresa en forma fraccionaria:

a) 1 dm, 1 cm, 1 mm

b) 7 décimas, 25 centésimas, 231 milésimas

2 ¿Cuántas unidades son necesarias para obtener un millón de cuartos? ¿Cuántos cuartos tiene un millón?

3 Calcula el valor de d para que las fracciones $\frac{5}{12}$ y $\frac{15}{d}$ sean iguales.

4 Escribe los números en tres formas fraccionarias:

a) 6 b) $\frac{12}{25}$ c) -5 d) $-\frac{3}{8}$

5 Halla la fracción irreducible de las siguientes fracciones:

a) $\frac{123}{75}$ c) $\frac{555}{333}$

b) $\frac{720}{3\,600}$ d) $\frac{300}{3\,600}$

6 Indica la fracción, simplifica y, a continuación, obtén el tanto por ciento que representa:

a) 180 de 720

b) 300 de 2 500

7 Reduce a común denominador las siguientes fracciones y ordénalas de menor a mayor:

a) $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{7}$ b) $\frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{14}{15}$

8 Ordena las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}$

b) $\frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{13}{15}$

9 Interpreta las siguientes expresiones como multiplicaciones y calcula su valor:

a) Los $\frac{2}{9}$ de 81

b) Los $\frac{3}{5}$ de 70

c) Los $\frac{7}{3}$ de 81

d) Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{6}$ de 36

10 Interpreta las siguientes expresiones como multiplicaciones y calcula su valor:

a) $\frac{20}{100}$ de 7 200

b) 20 % de 7 200

c) $\frac{1}{5}$ de 7 200

d) $\frac{200}{1\,000}$ de 7 200

11 Razona la respuesta:

a) ¿De qué número es 300 la quinta parte?

b) ¿De qué número es 8 500 el 50 %?

12 Calcula el valor de la expresión:

a) $2 : \frac{5}{7}$ b) $\left(\frac{2}{7} : \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{6}$

13 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{5} + \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5}\right)$

b) $\frac{3}{7} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\right)$

14 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{7}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{7}\right)$ b) $\frac{3}{8}\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right)$

A C T I V I D A D E S

15 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{8}\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{11}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)$

b) $\frac{5}{9}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)$

16 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}:\frac{3}{7}$

b) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)$

17 Dibuja los siguientes puntos de abscisa:

a) $x = 3$, b) $x = 5$, c) $x = \frac{5}{2}$

18 ¿Cuáles son las abscisas de los puntos A y B?

19 Dibuja en la recta racional los números:

a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{-3}{2}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{-8}{7}$

PROBLEMAS PARA APLICAR

20 En el salpicadero de un coche aparece el siguiente control del gasto de gasolina:

¿Qué fracción de depósito representa cada señal?

Si en el depósito caben 60 litros, ¿cuántos litros corresponderán a cada una de las fracciones anteriores? Si el litro de gasolina vale 1,20 euros, ¿cuánto costará llenar medio depósito? ¿Y tres cuartos de depósito?

21 Una tormenta de granizo en Candelaria ha dañado 7 plátanos de cada 15 en la huerta de Eduardo mientras que en la de David ha dañado 4 de cada 9. ¿En qué huerta se han dañado proporcionalmente más plátanos?

22 Un pintor prepara una mezcla con 4 litros de pintura por 3 litros de agua; otro, por cada 5 litros de pintura echa 4 litros de agua.

a) ¿Cuál de las dos preparaciones tiene proporcionalmente más pintura?

b) Si cada uno de los pintores llena un bidón con 63 litros de mezcla, ¿cuál es la cantidad de pintura que necesita cada uno?

23 En un instituto, $\frac{3}{8}$ de los alumnos estudian matemáticas, y el 35 %, física. ¿Cuál de estas dos asignaturas es la más elegida?

24 Un coche recorre 50 km en tres cuartos de hora, y otro recorre 36 km en 27 minutos. ¿Cuál es más rápido?

25 ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro necesita un bodeguero para envasar 600 litros de vino? ¿Y cuántas de $\frac{2}{3}$ de litro?

A C T I V I D A D E S

26 Una aleación está compuesta por $\frac{24}{29}$ de cobre, $\frac{4}{29}$ de estaño y $\frac{1}{29}$ de cinc. ¿Cuántos kilogramos de cada metal habrá en 348 kg de aleación?

27 Luis invita a sus amigos a comer una tarta. Pedro come $\frac{1}{5}$; Ana, $\frac{1}{6}$, y Tomás, $\frac{1}{3}$. Si Luis se come el resto, ¿cuánto come?

28 Una barra de cobre se corta en 5 trozos de $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{16}$ y $\frac{3}{4}$ de metro, respectivamente. ¿Qué longitud tenía inicialmente si en cada corte se estropea $\frac{1}{32}$ de metro?

29 Dado un cordel, Juan coge la mitad; de lo que queda, Pedro coge la mitad; de lo que queda, María coge la mitad; de lo que queda, Carmen coge $\frac{2}{5}$. Al final quedan 30 cm. ¿Cuál era la longitud del cordel?

30 Un grifo es capaz de llenar un depósito en 10 horas y otro en 8 horas. ¿Qué fracción de depósito se llenará si ambos grifos están abiertos durante 2 horas?

31 De los tres caños que fluyen a un estanque, uno puede llenarlo en 36 horas, otro en 30 horas y el tercero en 20 horas. Halla el tiempo que tardarán en llenarlo juntos.

32 Un hombre realiza un trabajo en 4 horas y un muchacho tardaría 6 horas en realizar lo mismo. ¿Cuánto tiempo emplearían trabajando los dos juntos?

33 Un grifo tarda en llenar un depósito 6 horas y otro tarda en llenar el mismo depósito 4 horas. ¿Cuánto tiempo emplearán los dos juntos?

34 De los dos caños que fluyen a un estanque, uno puede llenarlo en 36 horas y el otro en 30 horas. Abierto el desagüe, se tardaría en vaciarlo 20 horas. Abiertos los grifos y el desagüe al mismo tiempo, ¿cuánto se tardaría en llenar el estanque?

35 Un labrador tiene pienso para alimentar una vaca durante 27 días, y si fuera una oveja, para 54 días. ¿Para cuánto tiempo tendría pienso si tuviera que alimentar a la vaca y a la oveja?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

36 Interpreta en forma decimal o fraccionaria las siguientes expresiones:

a) Tres cuartos.

b) Tres de cada cinco.

c) Escala 1 a 50 000.

d) Cuarto y mitad.

e) Tres partes por millón.

f) Tres partes de pintura y dos de agua.

37 En la merienda, Ana se ha comido la mitad de la tarta; María, la cuarta parte, y Elena, la sexta parte, y el plato se ha quedado vacío. ¿Es cierto?

38 Dibuja en la recta racional los números opuestos 3 y −3, 5 y −5, 1 y −1. ¿Cómo son respecto del origen los puntos correspondientes a estos pares de abscisas?

39 Si divides el numerador y denominador de una fracción por el máximo común divisor de ambos, ¿qué clase de fracción resulta? Razona la respuesta.

40 Para dividir el número 4 578 entre 25, lo multiplico por 4 y separo luego con una coma las dos cifras de la derecha del producto. ¿En qué me fundo para operar así? Pon otros dos ejemplos aclaratorios.

ACTIVIDADES

41 ¿Cómo hallarás un número racional comprendido entre $\frac{21}{55}$ y $\frac{22}{55}$? ¿Puedes hallar más de uno?

42 Comprueba con un ejemplo que la semisuma de los dos números es un número comprendido entre ambos.

43 Si al numerador de una fracción lo aumentamos en 21, la fracción queda aumentada en 3. ¿Cuál es el denominador de la fracción? Justifica la respuesta.

44 Si al numerador de una fracción le restamos 40, la fracción disminuye en 5. ¿Cuál es el denominador de la fracción? Justifica la respuesta.

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

45 ¿Qué fracción representa 8 horas y 30 minutos de un día? ¿Y 4 días y 12 horas de una semana? Simplifica las fracciones obtenidas.

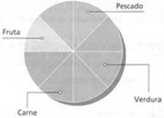
46 Calcula el valor de x para que las fracciones $\frac{12}{x}$ y $\frac{x}{27}$ sean iguales.

47 Las abscisas de los puntos A y B son $a = 3$ y $b = 7$. ¿Cuál es la abscisa de M, punto medio del segmento AB?

48 El agua, al congelarse, aumenta su volumen un décimo del mismo. ¿Qué volumen ocuparán 300 litros de agua después de helarse?

49 Un automóvil ha consumido $\frac{2}{5}$ de la gasolina que cabe en su depósito al recorrer los $\frac{5}{11}$ de un trayecto. Sabiendo que al final sobran 6 litros, halla la capacidad del depósito.

50 Observa este gráfico, que nos informa del gasto en alimentación de una familia.



Si la familia gasta 400 euros en comida:

a) Escribe la fracción del gasto según el tipo de alimentación.

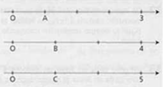
b) Calcula el gasto en cada tipo de alimento.

51 Dos obreros hacen un trabajo en 3 horas. Uno de ellos lo haría en 4 horas. Halla el tiempo que tardaría el otro.

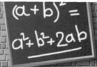
52 Una jarra contiene la misma cantidad de agua que 8 vasos pequeños o que 5 vasos grandes. Si inicialmente la jarra está llena, ¿qué fracción de agua queda en la jarra después de haber llenado un vaso pequeño y uno grande?

53 Un coche tarda dos horas en recorrer el trayecto AB, y otro en el trayecto BA tarda tres horas. Saliendo al mismo tiempo, uno de A y otro de B, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

54 Indica el número racional correspondiente a los puntos A, B y C:



MURAL DE MATEMÁTICAS



Los números fraccionarios te ayudan
NO PIERDAS LOS PAPELES

¡Menudo lío! Tu compañero Pedro te acaba de dar su parte del trabajo que tenéis que hacer a medias. Pero cuando has ido a sacar los papeles de la mochila se te han caído y se han desordenado. Los has recogido y, como Pedro los había numerado, has podido volver a ordenarlos (1,2,3... hasta 8).

Pero ¿seguro que solo había ocho?
¿No se habrá perdido alguno?

Realmente no puedes saberlo. Pero si él hubiera numerado las páginas con números fraccionarios podrías estar seguro.

¿Quieres saber cómo se hace? Es sencillo... Cada hoja lleva un número fraccionario cuyo denominador es siempre el total de las que tiene el trabajo. En este caso la primera sería 1/8 (la primera de ocho), la segunda 2/8 y así hasta 8/8.

EL NÚMERO MANDA

"El número puede decirse que gobierna al mundo de la cantidad, y las cuatro reglas de la aritmética pueden ser consideradas como el equipo completo del matemático". Lo dijo James Clerk Maxwell, un físico y matemático escocés que vivió el siglo pasado y de esto sabía mucho.

MONTAR EL NUMERITO

¿Sabías que la palabra *número* tiene muchos otros significados además del que se le da en matemáticas?
Un número es cada una de las partes de un espectáculo (*"Y ahora con ustedes un número de magia"*), una acción extravagante que llama la atención (*"No montes ahora un numerito"*), un billete para un sorteo (*"Deme un número para el sorteo de mañana"*)... Como ves, la palabra tiene un gran número de significados.

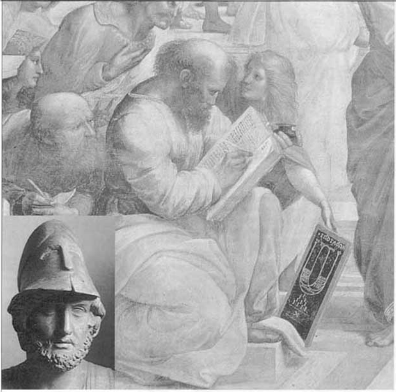
El AVO engañoso

Ya sabes que un octavo es la octava parte de una unidad (1/8). Pero esa misma palabra sirve para designar un elemento que ocupa el puesto número 8 en una lista (8º). La misma palabra sirve para designar un número fraccionario y un ordinal, igual que sucede con sexto, séptimo, décimo... Pero... ¡cuidado!, no siempre es así. La palabra treceavo, por ejemplo, sirve solo para designar el fraccionario (1/13), mientras que el ordinal (13º) es decimotercero. Y lo mismo sucede con onceavo (1/11) y undécimo (11º), veinteavo (1/20) y vigésimo (20º), dieciseisavo (1/16) y decimosexto (16º), y muchas otras. Aunque mucha gente lo utiliza mal, tú no te dejes engañar por el "**avo**".

FRACCIONES PARA CHUPARSE LOS DEDOS

Si alguna vez has acompañado a tus padres al mercado habrás comprobado que mucha gente usa las fracciones para pedir la carne, el fiambre y otros productos. Rara vez oirás pedir "**500 gramos de lomo**", sino "**medio de lomo**".
Y a veces usan fracciones bastante más complicadas: "**mitad de cuarto**", "**cuarto y mitad**" o "**tres cuartos**".

Números reales 2



Pitágoras enseñando a sus discípulos *(Rafael, 1510).*
En la fotografía pequeña, busto de Pericles (495-429 a.C.)

Se dice que Pericles murió de la peste que se llevó también a la cuarta parte de la población ateniense. Para conjurar el peligro se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos para preguntar cómo podría desaparecer la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Al parecer, los atenienses multiplicaron por dos las dimensiones del altar, pero esto no sirvió para detener la peste. ¿Se cumplió la petición del oráculo?

Pitágoras fue uno de los primeros matemáticos que estudiaron la necesidad de nuevos números además de los números racionales. Su célebre teorema fue el origen de estos números. Les dio el nombre de irracionales (no racionales).

1 Expresión decimal de los números racionales

Un número racional puede escribirse de muchas formas. Por ejemplo, **tres cuartos** tiene como expresión cualquiera de las siguientes:

$$\frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = 0{,}75 = 0{,}750 = \ldots$$

Para pasar un número racional de forma fraccionaria a forma decimal basta dividir el numerador por el denominador. Al hacer la división, los restos diferentes que pueden aparecer son los números **menores que el divisor**. Por tanto, a partir de un momento las cifras del cociente tienen que repetirse en **bloques iguales de cifras**, llamados **períodos**.

Según sea el período y el lugar de su comienzo, se tienen las tres siguientes posibilidades:

a) En la división (fig. a) aparece un **resto 0**; por tanto, las cifras siguientes del cociente son 0 y la expresión decimal es **limitada**. Se llama exacta. Aquí podemos considerar como período **el 0**.

   Una fracción es exacta cuando en la división aparece un resto parcial nulo.

b) Los restos de la división (fig. b) son distintos de 0 y los períodos se repiten **desde la coma**. En este caso la expresión es **ilimitada** y se llama periódica pura.

   Una fracción es periódica pura cuando las cifras del cociente se repiten en bloques iguales después de la coma.

c) Los restos de la división (fig. c) son distintos de 0 y los períodos **no se repiten desde la coma**. En este caso la expresión es también **ilimitada** y se llama periódica mixta.

   Una fracción es periódica mixta cuando las cifras del cociente se repiten en bloques iguales, pero no después de la coma.

En una expresión decimal, por ejemplo, 32,56 23 23..., se distinguen tres partes: **parte entera**, **anteperíodo** y **período**.

Parte entera	Anteperíodo	Período
32,	56	23

Todo número racional puede escribirse en forma decimal periódica.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Escribir en forma decimal:** $\frac{7}{40}$, $\frac{8}{7}$ y $\frac{13}{6}$

$\frac{7}{40} = 0{,}175000\ldots$ Parte entera 0, anteperíodo **175**, período **0**.

$\frac{8}{7} = 1{,}142857\ 142857\ldots$ Parte entera 1, período **142857**.

$\frac{13}{6} = 2{,}16666\ldots$ Parte entera 2, anteperíodo **1**, período **6**.

2 Expresión fraccionaria de los números decimales periódicos

Vamos a ver ahora cómo todo número decimal periódico puede escribirse en forma fraccionaria. En los siguientes ejemplos se indica el proceso para hallar la fracción a partir de cada una de las tres expresiones decimales distintas obtenidas en el epígrafe anterior.

a) **Forma fraccionaria de $x = 3{,}63000...$**

Se multiplica por 100: $100\,x = 363$, de donde $x = \dfrac{363}{100}$

b) **Forma fraccionaria de $x = 3{,}7575...$**

Se multiplica por 100:	$100\,x = 375{,}7575...$
Se deja como está:	$x = 3{,}7575$
Se resta:	$99\,x = 375 - 3$
Se halla el valor de x:	$x = \dfrac{375 - 3}{99} = \dfrac{372}{99}$

c) **Forma fraccionaria de $x = 2{,}47878...$**

Se multiplica por 1 000:	$1\,000\,x = 2478{,}7878...$
Se multiplica por 10:	$10\,x = 24{,}7878...$
Se resta:	$990\,x = 2\,478 - 24$
Se halla el valor de x:	$x = \dfrac{2\,478 - 24}{990} = \dfrac{2\,454}{990}$

Estos tres casos se pueden resumir en una fórmula que permite escribir de manera rápida la fracción correspondiente a una expresión decimal periódica:

$$x = \frac{EAP - EA}{9 \dots 9\,0 \dots 0}$$

E son las cifras de la parte entera.
A son las cifras del anteperíodo.
P son las cifras del período.
9...9 son tantos 9 como cifras tiene el período.
0...0 son tantos 0 como cifras tiene el anteperíodo.

Todo número decimal periódico puede escribirse en forma fraccionaria.

Ejercicios resueltos

2 **Escribir en forma fraccionaria los siguientes números:**

a) $2{,}75 = \dfrac{275}{100}$

b) $2{,}474747... = \dfrac{247 - 2}{99} = \dfrac{245}{99}$

c) $2{,}08345345... = \dfrac{208\,345 - 208}{99\,900} = \dfrac{208\,137}{99\,900}$

(comprobar estos resultados utilizando una calculadora).

UTILIZA LA CALCULADORA

- *Utiliza tu calculadora y halla el valor decimal de $\frac{237}{100}$, para ello introduces 237 ÷ 100, obtendrás 2,37.*
  Esta es una fracción decimal exacta.
  2 es la parte entera.
  37 es la parte decimal exacta.
- *Utiliza tu calculadora y halla el valor decimal de la fracción $\frac{122}{99}$, para ello introduces 122 ÷ 99; obtendrás 1,23232323. No vemos todas las cifras decimales pero en realidad tiene infinitas. Es decir:*
  $\frac{122}{99} = 1{,}2323... = 1{,}\overset{\frown}{23}$
  Esta es una fracción periódica pura.
  1 es la parte entera.
  23 es el período.
- *Utiliza tu calculadora y halla el valor decimal de la fracción $\frac{480468}{99000}$, para ello introduces 480468 ÷ 99000; obtendrás 4,853212121. No vemos todas las cifras decimales pero en realidad tiene infinitas. Es decir:*
  $\frac{480468}{99000} = 4{,}8532121... = 4{,}853\overset{\frown}{21}$
  Esta es una fracción periódica mixta.
  4 es la parte entera.
  853 es el anteperíodo.
  21 es el período.

3 Números irracionales. Caracterización decimal

Hemos visto que los números racionales tienen una característica esencial: **su expresión decimal es periódica**. Cabe ahora preguntarse:

¿Existen números decimales cuya expresión no es periódica?

La expresión decimal

$$a = 0{,}1\ 10\ 100\ 1000\ 10000\ 100000\ 1000000\ \ldots$$

es un número decimal **no periódico**. Este número es fácil de construir; se obtiene colocando sucesivamente bloques de 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... ceros detrás de cada 1. Nunca hay un bloque de cifras que se pueda repetir como período.

Un número importante aparece al medir la longitud de la circunferencia tomando el diámetro como unidad: es el número π. Para los cálculos, en cursos anteriores se ha tomado como valor aproximado 3,14. Sin embargo, su expresión decimal $\pi = 3{,}141592\ldots$, **no es periódica**.

La medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuando los catetos miden 1 es $\sqrt{2}$; al calcular su valor aparece también la expresión decimal $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$, que **no es periódica**.

En general, las **raíces cuadradas no exactas de números naturales** dan lugar a expresiones decimales no periódicas.

> **Las expresiones decimales no periódicas se llaman números irracionales.**
> **Los números racionales e irracionales se llaman números reales.**
> **El conjunto de los números reales se designa con R o $\mathbb{R}$.**

- Los números irracionales **no pueden expresarse en forma fraccionaria**, ya que no son periódicos.
- Los **números reales** son una ampliación de los **números racionales**, que a su vez abarcan a los **números enteros** y estos a los **números naturales**.

UTILIZA LA CALCULADORA

Trata de investigar tu calculadora y halla la expresión decimal de $\sqrt{3}$, para ello generalmente has de pulsar:

¿Qué obtienes?
Si lo has hecho bien has obtenido

1.732050808

La pantalla solo tiene espacio para mostrarte estas cifras decimales, pero en realidad faltan muchas otras, pues el $\sqrt{3}$ es un número decimal no periódico, es decir, es un número irracional.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Clasificar los siguientes números decimales en racionales o irracionales:**

a) 1,111 222 333 111 222 333 ...

b) 2,2 20 200 2000 20000 200000 ...

c) 3,1 12 122 1222 12222 122222 ...

d) 4,123 321 123 321 123 321 ...

a) Racional, ya que tiene como período 111 222 333.

b) Irracional, ya que detrás de la cifra 2 se van colocando sucesivamente 0, 1, 2, 3, ... n, ... ceros.

c) Irracional, ya que detrás de la cifra 1 se van colocando sucesivamente 0, 1, 2, 3, ... n, ... doses.

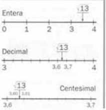
d) Racional, ya que tiene como período 123 321.

SUCESIVAS AMPLIACIONES DE LOS NÚMEROS

$N \subset Z \subset Q \subset R$

4 Aproximación decimal de números irracionales

APROXIMACIONES



Un número irracional tiene un número ilimitado de cifras; por tanto, su valor exacto es imposible escribirlo. Para manejar estos números tenemos que utilizar aproximaciones de los mismos. Aumentando el número de cifras el error va disminuyendo, de modo que puede ser tan pequeño como se quiera.

Veamos cómo se calculan las aproximaciones decimales de $\sqrt{13}$.

Por definición: $\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$

Aproximación entera: 1, 2, 3, 4, ...

$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 3 = 9 \\ 4 \cdot 4 = 16 \end{array}\right\}$ Luego: $3 < \sqrt{13} < 4$

El error cometido es menor que: $4 - 3 = 1$

Aproximación decimal: 3,1; 3,2; ...

$\left.\begin{array}{l} 3{,}6 \cdot 3{,}6 = 12{,}96 \\ 3{,}7 \cdot 3{,}7 = 13{,}69 \end{array}\right\}$ Luego: $3{,}6 < \sqrt{13} < 3{,}7$

El error cometido es menor que: $3{,}7 - 3{,}6 = 0{,}1$

Aproximación centesimal: 3,61; 3,62, ...

$\left.\begin{array}{l} 3{,}60 \cdot 3{,}60 = 12{,}96 \\ 3{,}61 \cdot 3{,}61 = 13{,}0321 \end{array}\right\}$ Luego: $3{,}60 < \sqrt{13} < 3{,}61$

El error cometido es menor que: $3{,}61 - 3{,}60 = 0{,}01$

Siguiendo este proceso se pueden obtener las siguientes cifras decimales y escribimos

$$\sqrt{13} = 3{,}6055512...$$

Este número es irracional.

En la tabla siguiente se resume este proceso y se indican los valores aproximados por defecto y por exceso, así como el error cometido:

Por exceso	4	3,7	3,61	3,606	...
Por defecto	3	3,6	3,60	3,605	...
Diferencia	1	0,1	0,01	0,001	...
Error <	1 unidad	1 décima	1 centésima	1 milésima	...

Esta estrategia de «**menor-mayor**» se utiliza también para calcular aproximaciones de números irracionales tales como

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, ...$$

4 + 4 = 8

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Hallar con dos cifras decimales el valor aproximado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm.**

Por el teorema de Pitágoras se tiene: $2^2 + 2^2 = x^2$. Luego: $x = \sqrt{8}$

Aproximación entera: $2^2 < 8 < 3^2$. Luego: x = 2...

Aproximación decimal: $2{,}8^2 < 8 < 2{,}9^2$. Luego: x = 2,8...

Aproximación centesimal: $2{,}82^2 < 8 < 2{,}83^2$. Luego: x = 2,82...

5 Números reales. Operaciones

Las operaciones con números reales son las mismas que con números racionales. Las operaciones se realizan con aproximaciones decimales, por defecto o por exceso, con más o menos cifras, según el grado de precisión que interese.

- En la práctica se utilizan aproximaciones por defecto.
- Si se emplean máquinas, se elige la aproximación máxima que admita. Luego, se toma el número de cifras adecuado al problema.

  Por ejemplo, si $\pi = 3{,}141592...$, con 4 cifras se puede tomar 3,1416, ya que el error es menor que si se elige 3,1415.
- Si se quiere controlar el error se deben utilizar aproximaciones por exceso y por defecto con el mismo número de decimales.

En las tablas siguientes se suman y multiplican dos números irracionales y se estudia el error cometido:

SUMA	$\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}+\sqrt{10}$
Por exceso	1,4143	3,1623	4,5766
Por defecto	1,4142	3,1622	4,5764
Error < diferencia	0,0001	0,0001	0,0002

La suma por defecto es 4,5764, y el error cometido, menor que 0,0002.

PRODUCTO	$\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$
Por exceso	1,4143	3,1623	4,472440
Por defecto	1,4142	3,1622	4,471983
Error < diferencia	0,0001	0,0001	0,000457

El producto por defecto es 4,4719, y el error cometido, menor que 0,0005.

Las operaciones con números reales cumplen las mismas propiedades que las de los racionales, ya que se realizan con aproximaciones decimales.

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Se quiere saber el área de una plaza circular de 50 m de radio. ¿Qué error se comete tomando $\pi = 3{,}1415$?

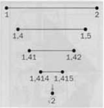
El área del círculo es πr^2. El error cometido es menor que la diferencia entre las aproximaciones por exceso y por defecto.

Aproximación

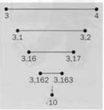
Entera:	$4 \cdot 2\,500$	$- 3 \cdot 2\,500$	$= 2\,500$ m²
Decimal:	$3{,}2 \cdot 2\,500$	$- 3{,}1 \cdot 2\,500$	$= 250$ m²
Centesimal:	$3{,}15 \cdot 2\,500$	$- 3{,}14 \cdot 2\,500$	$= 25$ m²
Milesimal:	$3{,}142 \cdot 2\,500$	$- 3{,}141 \cdot 2\,500$	$= 2{,}5$ m²
Diezmilesimal:	$3{,}1416 \cdot 2\,500$	$- 3{,}1415 \cdot 2\,500$	$= 0{,}25$ m²

El error cometido es menor que 0,25 m².

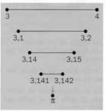
APROXIMACIONES DE $\sqrt{2}$



APROXIMACIONES DE $\sqrt{10}$



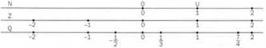
APROXIMACIONES DE π



6 Representación de números reales. Recta real

En la unidad anterior hemos visto cómo se representaban los números **racionales**. Para ello se necesita fijar dos puntos:

- el **punto origen O**, al que se le asocia el número **0**;
- el **punto unidad U**, al que se le asocia el número **1**.



❖ Números irracionales

Algunos números irracionales se pueden representar con regla y compás, por el procedimiento del dibujo del margen. Sin embargo, para muchos números no se puede aplicar este método. La representación de estos números se hace por aproximación. Veamos cómo se representa el número irracional $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992....$ Observa el dibujo.

- Primera aproximación: El punto está entre 1 y 2.
- Segunda aproximación: El punto está entre 1,2 y 1,3.
- Tercera aproximación: El punto está entre 1,25 y 1,26.
- Cuarta aproximación: El punto está entre 1,259 y 1,260.

Este proceso se puede continuar indefinidamente, pero los útiles de dibujo no permiten ir mucho más lejos.

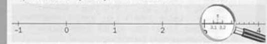
De esta forma podemos asociar cualquier número a un punto de la recta. También lo contrario es cierto; es decir, a cada punto le corresponde un número.

> Una vez fijados el 0 y el 1, a todo número real le corresponde un punto de la recta, y a todo punto de la recta, un número real. El número asociado a un punto se llama también **abscisa** del punto.

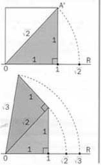
EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Dibujar el número irracional π.**

El número $\pi = 3{,}141592...$ Por tanto, el punto está entre 3 y 4, entre 3,1 y 3,2, entre 3,14 y 3,15, y así sucesivamente.



REPRESENTACIÓN DE RAÍCES POR GEOMETRÍA



CÍRCULOS DE APROXIMACIÓN

Diana

Los radios de los círculos indican la aproximación de la flecha a la diana.

Cuanto menor es el radio, mayor es la aproximación.

En la aproximación de números, el radio da el orden del error cometido.

7 Ordenación de números reales. Valor absoluto

❖ Ordenación de números reales

En la unidad anterior hemos visto cómo se comparan números racionales y, por tanto, cómo se ordenan. Para los números reales, aquellas definiciones siguen siendo válidas.

a) Dadas las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{7}$, ¿cuál es menor?

Aquí la respuesta no es inmediata. Si reducimos a común denominador estos números, se obtiene:

$$\frac{6}{7}, \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{24}{28}, \frac{21}{28} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{6}{7}$$

También se pueden comparar estos números pasando a expresiones decimales:

$$\frac{6}{7} = 0{,}85\ldots \quad \text{y} \quad \frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \text{luego} \quad \frac{3}{4} < \frac{6}{7}$$

b) Dados los números irracionales $\sqrt{10}$ y π, ¿cuál es menor?

Expresando estos números en forma decimal, se tiene:

$\sqrt{10} = 3{,}16\ldots$ $\quad \pi = 3{,}14\ldots$, luego π es menor que $\sqrt{10}$.

Para comparar números reales se pasan previamente a forma decimal. Luego, se comparan los números decimales.

UNA INTERPRETACIÓN

❖ Valor absoluto

Los números opuestos se representan por puntos simétricos respecto del origen y se dice que tienen el mismo **valor absoluto**.

Por ejemplo, los números -2 y 2 tienen el mismo valor absoluto.

$-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$ también tienen igual valor absoluto.

El **valor absoluto** de un número a se designa por $|a|$ y coincide con el número si es positivo o 0, y con su opuesto si es negativo.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EL CERO SIGUE SIENDO ESPECIAL

Para cada número positivo hay dos números que lo tienen como valor absoluto. Por ejemplo, 3 y −3 tienen el valor absoluto 3.

Existe una excepción: sólo hay un número con valor absoluto cero: el propio cero.

EJERCICIOS RESUELTOS

7 ¿Quién es menor, $\sqrt{17}$ ó $3\sqrt{2}$?

Pasando a las expresiones decimales, se tiene:

$\sqrt{17} = 4{,}12\ldots$

$3\sqrt{2} = 4{,}24\ldots$, luego es menor $\sqrt{17}$.

8 Intervalos y semirrectas

La ordenación de números permite definir algunos conjuntos de números que tienen una interpretación geométrica en la recta real.

✧ Intervalos

Los intervalos están determinados por dos números que se llaman **extremos**; en un intervalo se encuentran todos los números comprendidos entre ambos y también pueden entrar los extremos.

En las figuras se indica por:

- circulito negro si el extremo se considera del intervalo;
- circulito blanco si el extremo no se considera del intervalo.

Según esto se tienen los siguientes casos, en los que se dan también la notación y el nombre:

a b R $3 \le x \le 5$	a b R $3 < x < 5$	a b R $3 \le x < 5$	a b R $3 < x \le 5$
[3, 5]	(3, 5)	[3, 5)	(3, 5]
[a, b]	(a, b)	[a, b)	(a, b]
cerrado	abierto	abierto por la derecha	abierto por la izquierda

✧ Semirrectas

Las semirrectas están determinadas por un número; en una semirrecta se encuentran todos los números mayores (o menores) que él. Según que entre o no el origen de la semirrecta, se tienen los siguientes casos en los que se da también la notación:

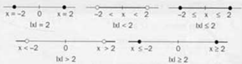
a R $3 \le x$	a R $3 < x$	a R $x \le 3$	a R $x < 3$
$[3, +\infty)$	$(3, +\infty)$	$(-\infty, 3]$	$(-\infty, 3)$
$[a, +\infty)$	$(a, +\infty)$	$(-\infty, a]$	$(-\infty, a)$

EJERCICIOS RESUELTOS

8 Dibujar los puntos, intervalos o semirrectas que determinan las siguientes relaciones:

$$|x| = 2, \quad |x| < 2, \quad |x| \le 2, \quad |x| > 2, \quad |x| \ge 2$$

Las figuras son:



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Hacer un dibujo.
- Utilizar la calculadora.
- Redondear los resultados.
- Interpretar las soluciones.

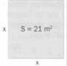
PROBLEMA

A don Aniceto se le ha encargado pintar una superficie cuadrada de 21 m². Después de ciertos cálculos no está seguro de si el valor del lado del cuadrado que debe pintar es el correcto. ¿Cuál es el valor del lado? ¿Qué instrumento de medida debe utilizar?

HACER UN DIBUJO

Se dibuja un cuadrado. Las dos dimensiones son iguales. Se toma como valor del lado buscado x.

La superficie del cuadrado es $x^2 = 21$, por tanto se trata de calcular un número x que multiplicado por sí mismo dé 21, es decir: $x = \sqrt{21}$



UTILIZAR LA CALCULADORA

Pulsamos 

y aparece en pantalla 4,582575695

REDONDEAR LOS RESULTADOS

Cuando se utiliza la calculadora, si el resultado no es exacto, en la pantalla aparecen muchas cifras decimales, pero generalmente no son necesarias tantas, por ello se **redondean los resultados**.

a) Redondeo de $\sqrt{21}$ con una cifra decimal:

Observamos la segunda cifra decimal, que es 8; por ser mayor que 5, añadimos una unidad a la primera cifra decimal.

Por tanto, $\sqrt{21} \approx 4,6$

b) Redondeo de $\sqrt{21}$ con dos cifras decimales:

Observamos la tercera cifra decimal, que es 2; por ser menor que 5, dejamos la segunda cifra decimal como aparece en pantalla.

Por tanto, $\sqrt{21} \approx 4,58$

Redondeo de $\sqrt{21}$ con tres cifras decimales:

Observamos la cuarta cifra decimal, que es 5; por ser mayor o igual a 5, añadimos una unidad a la tercera cifra decimal.

Por tanto, $\sqrt{21} \approx 4,583$

INTERPRETAR LAS SOLUCIONES

Si redondea con una cifra decimal el valor del lado sería 4,6 m y tendría que utilizar una cinta métrica que marcara los decímetros.

Si redondea con dos cifras decimales el valor del lado sería 4,58 m y tendría que utilizar una cinta métrica que marcara los centímetros.

Si redondea con tres cifras decimales el valor del lado sería 4,583 m y tendría que utilizar una cinta métrica que marcara los milímetros.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Escribe en forma decimal y fraccionaria:

a) 16 décimas
b) 676 centésimas
c) 13 centésimas
d) 8 257 milésimas

2 Expresa en unidades decimales, décimas, centésimas o milésimas los siguientes números:

a) 0,24 b) 83,246 c) 234,44 d) 189,675

3 Expresa las siguientes fracciones en forma decimal. Compara el resultado con los factores que aparecen al descomponer los denominadores. ¿Puedes sacar alguna consecuencia?

a) $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{23}{20}$ $\frac{13}{25}$ b) $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{23}{9}$ $\frac{132}{21}$

4 Escribe los números decimales como fracciones:

a) 0,25 1,75 0,121
b) 0,333... 2,121212... 0,126126...
c) 0,2333... 4,123535... 0,34545...

5 Calcula las siguientes operaciones:

a) 1,555... + 1,333...
b) 6,000... + 7,999...
c) $\frac{1}{3}$ +0,4999...
d) 10,999... + 6,44999...

6 Indica si el desarrollo decimal es periódico o no:

a) 7,5555...
b) 0,438 538 538...
c) 0,30 300 3000 30000 3...
d) 0,23 223 2223 22223...

7 Di si son racionales o no los siguientes números:

a) 7,8888...
b) −6,494949...
c) 1,252255222555...
d) 25,123321123321...

8 Escribe las aproximaciones por defecto del número π = 3,141592... con las mínimas cifras para que el error sea menor que una décima, centésima, milésima.

9 Da la aproximación por exceso de cada número:

$$\frac{1}{16}, \quad \pi, \quad \sqrt{3}, \quad \frac{5}{9}$$

con las mínimas cifras para que el error sea menor que una centésima.

10 Indica cuál es el mayor de los siguientes números:

a) 3,415 212 65 y 3,414 223 65
b) 7,001000100001... y 7,100100001...
c) 3,141 592 553 5... y 3,141 592 653 5...
d) 6,121 231 234... y 6,121 231 235...

11 Escribe un número real comprendido entre los siguientes:

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$
b) 1,4142 y 1,4143
c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$
d) π y $\frac{355}{113}$

12 Ordena de menor a mayor los siguientes números utilizando valores aproximados:

$$\sqrt{5}, \ \frac{27}{5}, \ \pi, \ \sqrt[3]{7}, \ -2{,}9999..., \ \frac{1}{3}, \ -\sqrt{3}$$

13 Calcula la suma y el producto de $\sqrt{5}$ y $\sqrt{13}$ dando el resultado con dos cifras decimales exactas.

14 Comprueba cuáles de las siguientes relaciones son ciertas o falsas:

a) $|-5| = -|5|$
b) $|0-7| = 7$
c) $|4-8| = 4-8$
d) $|12-15| = |12| - |15|$

15 ¿En qué intervalos entero, decimal y centesimal se encuentra el número irracional $\sqrt{2}$?

16 Dibuja los intervalos de las tres primeras aproximaciones de $\sqrt{7}$.

17 Dados los intervalos $A = \left(2, \frac{5}{2}\right)$ y $B = (1, 2)$, represéntalos gráficamente y di si tienen algún punto en común.

18 Representa en la recta real los siguientes intervalos de números:

a) $[2, 4]$ b) $(1, 6)$ c) $[1, 5]$ d) $(-1, 4]$

19 Representa en la recta real las siguientes semirrectas de números:

a) $[2, +\infty)$ b) $(-\infty, 6)$ c) $(1, +\infty)$ d) $(-\infty, -2]$

20 Utiliza la calculadora para hallar $\sqrt{456}$ y redondea el resultado en los siguientes casos:

a) Con una cifra decimal.
b) Con dos cifras decimales.

21 Utiliza la calculadora para hallar $\sqrt{253} + \sqrt{39}$ y redondea el resultado en los siguientes casos:

a) Con dos cifras decimales.
b) Con tres cifras decimales.

PROBLEMAS PARA APLICAR

22 Un prado cuadrado tiene de área 1 500 m². Utilizando la estrategia «menor-mayor», calcula el valor del lado hasta el orden de las décimas de metro.

23 Calcula el lado de un depósito en forma de cubo cuya capacidad es 500 m³. El orden de aproximación debe ser hasta las décimas.

24 Antes de saber que el número π era irracional se dieron algunos valores del mismo por diferentes matemáticos. Por ejemplo:

$$\frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \sqrt{10}, \sqrt[3]{31}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

a) ¿Cuántas cifras decimales de estos números coinciden con las de $\pi = 3{,}14159265...$?
b) Escribirlos luego de mayor a menor aproximación.

25 ¿Qué cantidad de alambre se necesita para cercar una finca cuadrada de 2 000 m² si se quieren poner tres vueltas de alambre? Calcula el lado con una aproximación de centímetros.

26 La hoja DIN-A4 tiene unas dimensiones tales que la longitud es igual a la anchura por $\sqrt{2}$. Si el lado pequeño mide 21 cm, ¿cuánto mide el lado mayor? Utiliza la aproximación centesimal de la raíz cuadrada.

27 Las tarjetas de crédito o el documento nacional de identidad tienen forma rectangular y sus dimensiones son tales que su cociente es:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Si el lado menor mide unos 54 mm, ¿cuánto mide el lado mayor?

28 Calcula el área de un círculo de 10 cm de radio y expresa el resultado con tres decimales exactos.

29 Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 10 cm y 12 cm. Expresa el resultado con una aproximación centesimal.

30 Calcula el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 10 cm. El número que has obtenido, ¿es racional o irracional? Dibuja la circunferencia y utiliza el teorema de Pitágoras.

31 Calcula la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 6 cm. ¿Qué clase de número es?

32 Dibuja un rectángulo cuya diagonal valga $\sqrt{5}$. Utiliza el teorema de Pitágoras.

33 Calcula el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 10 cm. Expresa el resultado con tres decimales.

34 Resuelve el problema de Delos propuesto a los atenienses por el oráculo de Apolo. Suponiendo que el altar tenía 1 m³, ¿cuánto mide la arista del cubo de 2 m³?

35 Un depósito de agua de 2 000 m³ tiene forma de ortoedro de base cuadrada. Calcula la arista de la base sabiendo que la altura mide 10 m. El orden de aproximación debe ser hasta las décimas.

A C T I V I D A D E S

CUESTIONES PARA ACLARARSE

36 ¿Son ciertas estas igualdades?

a) $4 = 3{,}999...$
b) $-5 = -4{,}999...$
c) $73 = 72{,}999...$

37 ¿Hay algún número decimal comprendido entre 0,999... y 1? ¿Y entre 3,999... y 4?

38 ¿Qué diferencia hay entre las expresiones decimales de un número racional y de un número irracional? Pon ejemplos.

39 ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

a) Todo número real es racional.
b) Todo número natural es entero.
c) Todo número entero es racional.
d) Todo número real es irracional.

40 ¿Cuántas veces cabe el diámetro en la circunferencia? ¿Este número es racional o irracional?

41 ¿Cuántas veces cabe el lado de un cuadrado en su diagonal? ¿Este número es racional o irracional?

42 Razona si son ciertas las siguientes relaciones:

a) $|a - b| = |a| - |b|$
b) $|a + b| = |a| + |b|$

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

43 Efectúa la división 1 : 7. ¿Cuál será la cifra decimal que ocupa el lugar 605?

44 Efectúa la división 5 : 14. ¿Cuál será la cifra decimal que ocupa el lugar 1 001?

45 ¿Qué cifra ocupa el lugar 100 después de la coma en el número irracional 0,07 007 0007...?

46 Escribe las aproximaciones por exceso del número $\pi = 3{,}141592...$ con las mínimas cifras para que el error sea menor que una décima, centésima, milésima.

47 El número π se ha expresado clásicamente por medio de las aproximaciones fraccionarias $\frac{22}{7}$ (Arquímedes) y $\frac{355}{113}$ (Adrián Métius). Compara estos valores con el de $\pi = 3{,}141\,592\,653\,...$ y di cuál es el orden del error cometido.

48 Tienes una bolsa con 10 bolas numeradas del 0 al 9. Vas a extraer bolas y formas un número con el siguiente criterio: «La cifra de la primera bola extraída es la parte entera y las cifras de las siguientes forman la parte decimal».

a) Si cada vez que extraes una bola no la devuelves, ¿cuál es el número máximo o mínimo que puedes obtener?
b) Si cada vez que extraes una bola la devuelves y el proceso no termina nunca, ¿crees que obtendrías un número racional o irracional?

49 Observa la sucesión de números racionales:

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, ..., \frac{19\,601}{13\,860}, ...$$

a) ¿Cuál es la fracción siguiente?
Halla la relación entre una fracción y la anterior.
b) Con la calculadora, halla los valores decimales de cada fracción. ¿Hacia qué número se acercan?

50 Representa $\sqrt{17}$ y $\sqrt{29}$ en la recta real utilizando el teorema de Pitágoras.

51 Para representar las raíces cuadradas de los números naturales se utiliza el teorema de Pitágoras. Escribe con los cuadrados 1, 4, 9 y 16, como suma o diferencia de estos, los restantes números hasta 20. El número máximo de términos debe ser tres.

MURAL DE MATEMÁTICAS

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

UN NÚMERO QUE VALE SU PESO EN ORO

1,618... parece a simple vista un número cualquiera, pero en realidad es un número de oro. Ya en la antigua Grecia, filósofos y artistas descubrieron que los rectángulos cuyos lados a y b están en relación $\frac{a}{b}$ = 1,618 son especialmente armoniosos (por ejemplo, uno en el que el lado corto tenga 10 centímetros, y el largo, 16,18).
Un rectángulo así lo llamaron rectángulo áureo.

A ese número (que es el resultado de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) le dieron por nombre **número áureo**. Lo simbolizaron con la letra griega Φ ("fi") en honor del escultor Fidias, maestro de las proporciones. El rectángulo áureo tiene una curiosa propiedad. Si creas en él un cuadrado tomando como lado el lado corto del rectángulo, la parte que sobra es, a su vez, un rectángulo áureo; una especie de hijo del anterior que guarda exactamente las mismas proporciones que su padre.

Arte en clave de Fi

A lo largo de la historia, muchos artistas han apreciado la belleza y la armonía de los rectángulos áureos. Cientos de cuadros están pintados sobre lienzos que guardan exactamente esas proporciones, y las fachadas de algunas de las grandes obras de la arquitectura (como el Partenón de Atenas) son rectángulos áureos. En este cuadro, titulado "Semitaza gigante volando con anexo inexplicable de cinco metros de longitud", el pintor Salvador Dalí dispuso todos los objetos siguiendo rectángulos áureos (ABCD, ABEF, AGHF, IJHF, JHKN, MJNL).

HISTORIAS DE PI

En un documento egipcio de hace 1700 años (el papiro de Rhind) ya se menciona este número y se le da un valor de $\frac{256}{81}$, o, lo que es lo mismo, 3,1604.
Todavía no habían afinado mucho.

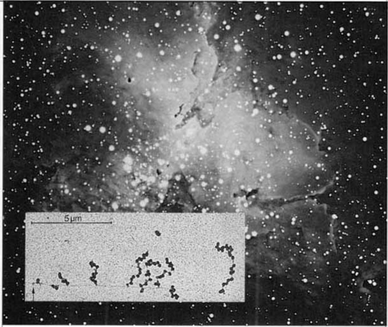
El matemático chino Tsu Chung-Chih (que vivió hace unos 1500 años) le dio un valor de $\frac{355}{113}$, es decir, 3,1415929.
Ya se iba acercando.

La idea de designar el número con el símbolo π es bastante más reciente (de hace unos 300 años) y se le ocurrió al matemático inglés William Jones, aunque quien popularizó su uso fue el suizo Leonard Euler unos cien años más tarde.

A lo largo de la historia, los matemáticos de todo el mundo han tratado de obtener las mayores aproximaciones a **π**. Una de las últimas es la que lograron David y Gregory Chudnovsky, de la Universidad de Columbia, en Nueva York (EE.UU.), que hallaron su valor con... ¡1 011 196 691 decimales! Escrita en folios normales, la cifra que obtuvieron ocuparía unas 260 000 páginas.

Potencias y raíces de números reales

3



Considerado el universo como una inmensa esfera, su radio aproximado hoy día es:

$$r = 1{,}42 \times 10^{26}\ m$$

En la fotografía pequeña tienes un cultivo de bacterias. El tamaño de las mismas es del orden de una micra ($1 \mu m = 10^{-6}\ m$).

POTENCIAS DE 10 Y EL UNIVERSO

La ciencia descubre la naturaleza de nuestro universo, de nuestro planeta y de nosotros mismos. El viaje comienza en el hombre hacia dentro y hacia fuera. Nuestras medidas giran alrededor del metro. Las potencias de 10, a medida que aumenta el exponente (1, 2, 3, ...), nos alejan hacia mundos cada vez más lejanos y cada vez más grandes: planetas, estrellas, galaxias... Cuando disminuye el exponente (−1, −2, −3, ...), las potencias nos introducen en mundos cada vez más pequeños: moléculas, átomos, protones, electrones...

Las potencias nos permiten abarcar en longitud todas las distancias del universo. Y lo que llama más la atención, nuestro viaje, desde lo más lejano del universo hasta las pequeñísimas partículas de que se compone, están comprendidas en el intervalo 10^{-30} a 10^{30} metros. «¿Para qué utilizar números mayores?», nos preguntamos. La curiosidad del hombre es infinita.

1 Potencias de exponente natural

❖ Definición

El producto $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ tiene sus siete factores iguales. Este producto se indica en forma abreviada así: a^7.

- a^7 se llama **potencia**, y el factor **a**, **base**.
- El **número de veces** que se repite el factor a se llama **exponente**.

La potencia x^2 se llama cuadrado, y la potencia x^3, cubo. Las siguientes se llaman cuarta, quinta, sexta... y, en general, enésima potencia.

> La potencia a^n, $(n > 1)$, es el producto de n factores iguales a la base:
> $$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad \text{(n veces)}$$

❖ Las propiedades

La notación potencial facilita los cálculos con números y sirve además para recordarlos mejor. Las siguientes reglas indican cómo se opera con potencias. Estas propiedades son consecuencia inmediata de la definición.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	El producto de dos potencias de la misma base es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la suma de los exponentes.
$a^m : a^n = a^{m-n}$	El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la diferencia de los exponentes.
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	El producto de dos potencias con el mismo exponente es otra potencia que tiene por base el producto de las bases y por exponente el mismo.
$a^m : b^m = (a : b)^m$	El cociente de dos potencias con el mismo exponente es otra potencia que tiene por base el cociente de las bases y por exponente el mismo.
$(a^m)^n = a^{mn}$	La potencia de una potencia es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente el producto de los exponentes.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

$(-7)^4 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = 2\,401$

2 $5^4 \cdot 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7$

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$(9^2)^3 = 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^6$

$7^3 \cdot 5^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (7 \cdot 5)\,(7 \cdot 5)\,(7 \cdot 5) = (7 \cdot 5)^3 = 35^3$

$$\frac{9^3}{4^3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \left(\frac{9}{4}\right)^3$$

POTENCIAS Y DADOS

El número de resultados diferentes al lanzar dos dados es 6^2.

2 Potencias de exponente entero

La definición dada de potencias de exponente natural exige que el número n sea mayor que 1. ¿Qué sucede entonces con las expresiones

$$\ldots,\ a^{-m},\ \ldots,\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^{1},\ a^{0}?$$

¿Se les puede asignar algún número de modo que sigan siendo válidas las mismas propiedades que tienen las potencias de exponente natural mayor que 1? A continuación se trata de justificar la definición de estas potencias.

Observa en el cuadro siguiente qué ocurre cuando se aplica la definición de potencia y la propiedad del cociente de potencias:

Aplicando la definición de potencia	Aplicando la propiedad del cociente de potencias	Si los dos resultados deben ser iguales, conviene tomar
$\frac{a^5}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{1} = 1$	$\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$	$a^0 = 1$
$\frac{a^6}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{a}{1} = a$	$\frac{a^6}{a^5} = a^{6-5} = a^1$	$a^1 = a$
$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$	$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

La ampliación de potencias a exponentes enteros se realiza en la siguiente definición, con la cual siguen siendo válidas las cinco propiedades de las potencias.

Las potencias de exponente entero se definen así:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n > 1)$$

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (m > 0)$$

Con esta definición, las propiedades de estas potencias son las mismas que las de las potencias de números naturales.

POTENCIAS DE DIEZ

ORDEN DE MAGNITUDES DE ALGUNAS MEDIDAS DE NUESTRO UNIVERSO (en cm)

- 10^{18} *Distancia a las estrellas más cercanas.*
- 10^{13} *Distancia al Sol.*
- 10^{10} *Distancia a la Luna.*
- 10^{9} *Diámetro de la Tierra.*
- 10^{6} *Distancia entre dos pueblos vecinos.*
- 10^{5} *Un buen paseo.*
- 10^{4} *Altura de un cerro pequeño.*
- 10^{3} *Largo de una piscina.*
- 10^{2} *Diámetro de una mesa camilla.*
- 10^{1} *Un palmo.*
- 10^{0} *Centímetro.*
- 10^{-1} *Espesor de un sobre.*
- 10^{-2} *Espesor de un hilo.*
- 10^{-5} *Longitud de onda de los rayos visibles.*
- 10^{-8} *Longitud de onda de los rayos X.*

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Hallar el valor de las siguientes potencias:**

a) $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{3^1}} = 3^1 = 3$

c) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

d) $12^{-3} : 4^{-3} = (12 : 4)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

e) $7^{-2} \cdot 7^2 = \frac{1}{7^2} \cdot 7^2 = \frac{7^2}{7^2} = 1$

f) $\frac{8^2}{8^{-2}} = \frac{8^2}{\frac{1}{8^2}} = 8^2 \cdot 8^2 = 8^4 = 4\,096$

UN CASO PATOLÓGICO

0^0

Esta potencia no se puede definir de modo que tome un valor real.

3 Potencias de 10. Notación científica

Si decimos que el número de quinielas de 14 partidos es 4 782 969, es fácil que la mayoría lo olvide; pero si decimos que es 3^{14} (3, resultados de un partido, y 14, número de partidos) seguro que es más fácil recordarlo.

La **velocidad de la luz** en el vacío es aproximadamente unos 300 000 km/s. Esta cantidad, escrita en metros, es 300 000 000 m/s. Con potencias puede escribirse así:

$$300\,000\,000 \text{ m/s} = 3 \cdot 100\,000\,000 \text{ m/s} = 3 \cdot 10^{8} \text{ m/s}$$

La **masa de la Tierra** es, aproximadamente:

$$5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ kg} = 598 \cdot 10^{22} \text{ kg} = 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Un **año luz** es la longitud que recorre la luz en un año. Su valor es, aproximadamente:

$$9\,460\,000\,000\,000\,000 \text{ m} = 946 \cdot 10^{13} \text{ m} = 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

La **masa de un protón** es:

$$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,169 \text{ kg} = 1{,}69 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

Esta forma de escribir números grandes o pequeños utilizando las potencias de 10 se llama **notación científica**. Tiene la ventaja de que es más fácil recordar los números y también más simple el cálculo con ellos.

En el sistema métrico decimal las potencias más empleadas en las medidas se indican con prefijos seguidos de la unidad. Por ejemplo, la medida del radio del electrón es, empleando potencias, $2{,}818 \cdot 10^{-15}$ m, y empleando el sistema métrico sería 2,818 femtómetros.

Un número en notación científica $N = a{,}b\,c\,d... \cdot 10^{n}$ consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra no nula.
- Una parte decimal.
- Una potencia de base 10 con exponente entero.

En esta notación el exponente n indica el **orden de la magnitud**.

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Indicar el orden de magnitud de las siguientes medidas:**

a) La masa del Sol es: $1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg.

b) La masa de un electrón es: $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

c) La longitud del paramecio es: $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ m.

Los órdenes de magnitud son: a) 30, b) −27, c) −5.

5 **Realizar las siguientes operaciones:**

a) $3{,}74 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}8 \cdot 10^{18}$

b) $5{,}42 \cdot 10^{8} \cdot 6{,}8 \cdot 10^{12}$

a) $3{,}74 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}8 \cdot 10^{18} = (3{,}74 \cdot 1{,}8) \cdot (10^{-10} \cdot 10^{18}) = 6{,}732 \cdot 10^{8}$

b) $5{,}42 \cdot 10^{8} \cdot 6{,}8 \cdot 10^{12} = 36{,}856 \cdot 10^{20} = 3{,}6856 \cdot 10^{21}$

NÚMEROS GRANDES Y PEQUEÑOS

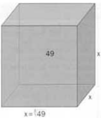
A medida que se han ido utilizando números más grandes y más pequeños ha sido necesario ampliar los prefijos del sistema métrico decimal. En la actualidad son los de esta tabla:

exa	10^{18}
peta	10^{15}
tera	10^{12}
giga	10^{9}
mega	10^{6}
miria	10^{4}
kilo	10^{3}
hecto	10^{2}
deca	10^{1}
	$10^{0} = 1$
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}
pico	10^{-12}
femto	10^{-15}
atto	10^{-18}

RECUERDA

Las calculadoras muestran los números de una forma científica, así:

4 Raíz de un número



$x = \sqrt[3]{49}$

En la unidad anterior se han calculado raíces cuadradas de un número por aproximaciones sucesivas utilizando la estrategia «**menor-mayor**». Aquí se extiende este método para hallar la raíz de índice cualquiera de un número.

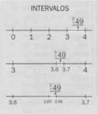
¿Qué número positivo multiplicado por sí mismo tres veces da 49?

Este número es $\sqrt[3]{49}$ y se llama raíz cúbica de 49.

Por definición: $(\sqrt[3]{49})^3 = 49$

Para averiguar el valor de $\sqrt[3]{49}$ se puede seguir el proceso que se resume en el cuadro siguiente. En él se van calculando aproximaciones por defecto y por exceso con un número de decimales creciente:

Aproximación	Por defecto	Por exceso	$\sqrt[3]{49}$ está comprendido entre	Error máximo
Entera	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	3 y 4	1
Decimal	$3,6^3 = 46,656$	$3,7^3 = 50,653$	3,6 y 3,7	0,1
Centesimal	$3,65^3 = 48,627$	$3,66^3 = 49,027$	3,65 y 3,66	0,01



Continuando este proceso se puede conseguir un **error tan pequeño como se quiera, sin más que aumentar el número de cifras decimales que se toman.**

Por tanto, se puede escribir que $\sqrt[3]{49} = 3,65930571...$ Este número es irracional. En el cálculo de raíces aparecen a menudo números irracionales, es decir, números decimales no periódicos.

Los números positivos cuyo cubo es 2, 3, 4, ... se designan por $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, ... y se llaman **raíces cúbicas**.

Los números positivos cuya cuarta potencia es 2, 3, 4, ... se designan por $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, ... y se llaman **raíces cuartas**.

Las raíces siguientes de números positivos se llaman **raíces quintas, sextas, séptimas**..., y en general **raíces enésimas**. Todas las raíces se pueden calcular utilizado la **multiplicación** y la estrategia **«menor-mayor»**.

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, n número natural.

En $\sqrt[n]{a}$, **n** se llama **índice**; $\sqrt{\ }$, **radical**, y **a**, **radicando**.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **¿Entre qué números enteros se encuentra la raíz cúbica de 174?**

$$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \\ 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \end{array}\right\} \quad \text{Luego: } 5 < \sqrt[3]{174} < 6$$

7 **Expresar en forma de potencia la relación $\sqrt[8]{23} = x$.**

Por definición de raíz octava se tiene que $x^8 = 23$.

5 Número de raíces. Radicales equivalentes

❖ Número de raíces

Si el **índice es par** hay tres posibilidades:

- **Radicando positivo**: existen dos raíces opuestas.
  Por ejemplo, la raíz cuadrada de 36 puede ser 6 o −6.
  Para distinguir las dos raíces se escribe: $\sqrt{36} = 6$ y $-\sqrt{36} = -6$
  Notación: la raíz positiva se designa sin signo y la negativa con signo −.
- **Radicando igual a 0**: tiene por raíz a 0.
- **Radicando negativo**: no tiene raíces, ya que todo número elevado a una potencia de exponente par es positivo.

Si el **índice es impar**, todo número tiene una sola raíz: **positiva**, si el radicando es positivo; **negativa**, si el radicando es negativo, y **nula**, si el radicando es 0.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{0} = 0$, $\sqrt[3]{-27} = -3$

❖ Radicales iguales o equivalentes. Comparación

Los radicales $\sqrt{7} = \sqrt[2]{7^1}, \sqrt[4]{7^2}, \sqrt[6]{7^3}, \ldots$ tienen la misma raíz: 2,645... Estos radicales se dice que son **iguales** o **equivalentes**. Si observas estos radicales iguales, $\sqrt[2]{7^1} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[6]{7^3}$, podrás darte cuenta de que para pasar del primero al segundo o al tercero se multiplican el índice y el exponente por un mismo número.

> Dos radicales son iguales o equivalentes si tienen las mismas raíces.
> Si se multiplica o divide el índice de un radical y el exponente del radicando por un mismo número natural distinto de 0, se obtiene otro radical equivalente.

Esta regla permite **simplificar** radicales, obtener dos radicales con el **mismo índice** y **comparar radicales**. El proceso es similar al que se utiliza con las fracciones.

De los radicales $\sqrt[3]{10^2}$ y $\sqrt[4]{10^3}$ se puede pasar a $\sqrt[12]{10^8}$ y $\sqrt[12]{10^9}$ multiplicando índice y exponente por 4 en el primero y por 3 en el segundo.

De dos radicales que tienen el mismo índice es mayor el que tiene mayor radicando.

EJERCICIOS RESUELTOS

8 **Simplificar los siguientes radicales:** $\sqrt[6]{2^3}, \sqrt[12]{5^4}, \sqrt[18]{a^{12}}$

Dividiendo el índice y el exponente de cada radical por el mismo número, 3, 4 y 6, respectivamente, se tiene: $\sqrt[2]{2} = \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{a^2}$

9 **Reducir a índice común y ordenar** $\sqrt[2]{2}, \sqrt[4]{2^3}, \sqrt[6]{2^5}$

Eligiendo como índice común 12 = m.c.m. (2, 4, 6), los radicales se transforman en: $\sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{2^9}, \sqrt[12]{2^{10}}$. Ordenación: $\sqrt[12]{2^6} < \sqrt[12]{2^9} < \sqrt[12]{2^{10}}$

Número de raíces		
$\sqrt[n]{a}$	n par	n impar
a > 0	2	1
a = 0	1	1
a < 0	0	1

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

UN MÉTODO PARA EXTRAER RAÍCES

$$\sqrt[12]{4\,096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

Algunas raíces se pueden extraer fácilmente descomponiendo el radicando en factores y simplificando luego el índice y el exponente.

6 Potencias de exponente fraccionario

Teclas de potencia x^y $\wedge$

2 x^y $\left(\frac{1}{2}\right)$ = 1,41...

2 $\wedge$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ = 1,41...

Teclas de raíz $\sqrt{\ }$ $x^{1/y}$

2 $\sqrt{\ }$ = 1,41...

2 $x^{1/y}$ 2 = 1,41...

Hemos visto cómo se definen las potencias de exponente natural y entero. ¿Qué significado se puede dar a las siguientes potencias?:

$$a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{1}{3}},\ a^{-\frac{1}{2}},\ a^{-\frac{1}{3}},\ a^{\frac{2}{3}},\ a^{-\frac{2}{3}}$$

Observa en el cuadro qué ocurre al aplicar la definición de raíz y la propiedad del producto de potencias de la misma base:

Aplicando la definición de raíz	Aplicando la propiedad del producto de potencias de la misma base	Si los resultados son iguales, los factores también deben serlo
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$	$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{a} = a$	$a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a$	$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

Estas igualdades permiten definir, en general, las potencias de exponente $\frac{1}{n}$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Esta definición se extiende a las potencias cuyo exponente sea una fracción cualquiera. El siguiente esquema justifica la definición si queremos también que se conserven las propiedades de las potencias:

$$\sqrt[3]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{2\cdot\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$
$$\sqrt[5]{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{5}} = a^{3\cdot\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{5}}$$
$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Una potencia de exponente fraccionario es igual a un radical donde:
- el **denominador** de la fracción es el **índice del radical**, y
- el **numerador** de la fracción es el **exponente del radicando**.

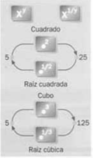
La igualdad de radicales se puede establecer a partir de la igualdad de potencias de exponente fraccionario.

Dos potencias de exponente fraccionario son iguales o equivalentes si los radicales correspondientes lo son o, también, si las fracciones de estas potencias son equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p} \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

Esta propiedad permite **simplificar**, obtener potencias con el **mismo índice** y **comparar** potencias. El proceso es similar al que se utiliza con fracciones. De las potencias $10^{\frac{2}{3}}$ y $10^{\frac{3}{4}}$ se puede pasar a $10^{\frac{8}{12}}$ y $10^{\frac{9}{12}}$.

PROCESOS RECÍPROCOS



Utiliza la calculadora científica para probar que las potencias x^n $x^{\frac{1}{n}}$ *son recíprocas.*

En las calculadoras, $x^{\frac{1}{2}}$ *se designa por* $\sqrt{x}$, *y* $x^{\frac{1}{3}}$, *por* $\sqrt[3]{x}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

10 **Calcular el valor de la siguiente potencia:**

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = \sqrt{8^2} = 8$$
$$4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$$

7 Propiedades de los radicales

Las siguientes reglas indican cómo se opera con radicales. La demostración es inmediata, basta elevar a la potencia del índice los dos miembros y comprobar que el resultado es el mismo:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$	El producto de dos radicales del mismo índice es otro radical que tiene por índice el común y por radicando el producto de los radicandos.
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	$\sqrt[4]{21} : \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{3}$	El cociente de dos radicales del mismo índice es otro radical que tiene por índice el común y por radicando el cociente de los radicandos.
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt{6})^3 = \sqrt{6^3} = \sqrt{216}$	La potencia de una raíz es otra raíz que tiene por índice el mismo y por radicando la potencia del radicando.
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[2]{12}} = \sqrt[6]{12}$ $= \sqrt[2]{\sqrt[3]{12}}$	La raíz de una raíz es otra raíz que tiene por índice el producto de los índices y por radicando el mismo.

Las propiedades de los radicales permiten introducir números en un radical. Veamos con algunos ejemplos cómo se opera:

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = \sqrt{12}$

b) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8}\ \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$

Veamos ahora cómo se realiza el proceso contrario, es decir, sacar fuera del radical los factores que son raíces exactas:

a) $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = 10\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{810} = \sqrt[4]{81 \cdot 10} = 3\sqrt[4]{10}$

EJERCICIOS RESUELTOS

11 **Hallar la suma de los siguientes radicales sacando fuera los factores posibles:**

a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{18} - \sqrt{32}$ b) $\sqrt{5} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{18} - \sqrt{32} = \sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{180} - \sqrt{80} = \sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

12 **Simplificar:**

a) $\sqrt[4]{3^2}$ b) $\sqrt[8]{5^4}$ c) $\sqrt[9]{27}$ d) $\sqrt[5]{1\,024}$

a) $\sqrt[4]{3^2} = \sqrt[2]{3}$

b) $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt[2]{5}$

c) $\sqrt[9]{27} = \sqrt[9]{3^3} = \sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[5]{1\,024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

UNAS IGUALDADES ÚTILES

Las siguientes igualdades aparecen con frecuencia en la suma de radicales, tanto en un sentido como en otro:

$\sqrt{2}$

$2\sqrt{2} = \sqrt{8}$
$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$
$4\sqrt{2} = \sqrt{32}$
$5\sqrt{2} = \sqrt{50}$
$6\sqrt{2} = \sqrt{72}$
$7\sqrt{2} = \sqrt{98}$
$8\sqrt{2} = \sqrt{128}$
$9\sqrt{2} = \sqrt{162}$
$10\sqrt{2} = \sqrt{200}$

$\sqrt{3}$

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$
$3\sqrt{3} = \sqrt{27}$
$4\sqrt{3} = \sqrt{48}$
$5\sqrt{3} = \sqrt{75}$
$6\sqrt{3} = \sqrt{108}$
$7\sqrt{3} = \sqrt{147}$
$8\sqrt{3} = \sqrt{192}$
$9\sqrt{3} = \sqrt{243}$
$10\sqrt{3} = \sqrt{300}$

8 Cálculo con potencias y raíces

Propiedades de las potencias de exponente fraccionario

Las potencias de exponente fraccionario verifican las mismas propiedades que las potencias de exponente entero. Las operaciones con radicales se simplifican si se pasa a potencias de exponente fraccionario.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 3^{\frac{8}{15}}$	$\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{5}} = 7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}} = 7^{\frac{11}{15}}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$3^{\frac{1}{3}} : 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{15}}$	$\sqrt[3]{8} : \sqrt[5]{8^3} = 8^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{3}{5}} = 8^{\frac{1}{3}-\frac{3}{5}} = 8^{-\frac{4}{15}}$
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} = (3 \cdot 6)^{\frac{1}{3}} = 18^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{9} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = (8 \cdot 9)^{\frac{1}{3}} = 72^{\frac{1}{3}}$
$a^m : b^m = (a : b)^m$	$12^{\frac{1}{3}} : 4^{\frac{1}{3}} = (12 : 4)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[7]{14} : \sqrt[7]{7} = 14^{\frac{1}{7}} : 7^{\frac{1}{7}} = (14 : 7)^{\frac{1}{7}} = 2^{\frac{1}{7}}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{7}} = 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}} = 3^{\frac{1}{14}}$	$\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{8}$

Racionalización

En los cálculos a mano conviene evitar denominadores con raíces. Algunas veces, multiplicando numerador y denominador por el mismo número conseguimos que aparezca un número entero. Veamos un ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Este proceso de obtener como denominador un número racional se llama **racionalización**. Con el uso de las calculadoras ha perdido utilidad, pero es todavía necesario para simplificar algunas veces las expresiones.

ES MÁS FÁCIL...

operar así:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,4142...}{2} = 0,7071...$$

que así:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1,4142...} = 0,7071...$$

De ahí el interés de la racionalización de fracciones.

EJERCICIOS RESUELTOS

13 **Calcular las siguientes potencias:**

a) $81^{\frac{3}{4}}, 81^{0,75}$ b) $\left(8^{\frac{12}{15}}\right)^{\frac{15}{18}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{8^6}}$

a) $81^{0,75} = 81^{\frac{3}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = 3^3$ b) $\left(8^{\frac{12}{15}}\right)^{\frac{15}{18}} = 8^{\frac{12}{18}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{8^6}} = \left(8^{\frac{6}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{6}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 8^{\frac{6}{6}} = 8$

14 **Racionalizar esta expresión:** $\dfrac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ y se desarrolla el producto que aparece en el denominador.

$$\frac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Simplificar el problema.
- Utilizar un diagrama en árbol.
- Generalizar los resultados parciales.

PROBLEMA

Los alumnos de tercero C discuten sobre el número de quinielas necesarias para acertar los 14 resultados de una jornada de fútbol. Después de ciertos tanteos comprueban que las potencias son esenciales para expresar de forma sencilla los resultados parciales y el total. ¿Cuántas quinielas diferentes hay que rellenar para tener la certeza de acertar?

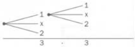
SIMPLIFICAR EL PROBLEMA

- Para resolver el problema se puede empezar reduciendo su dificultad. En este caso se puede intentar con cantidades más pequeñas: ¿Cuántos resultados posibles se pueden dar con un solo partido? ¿Y con dos partidos? ¿Y con tres partidos?

UTILIZAR UN DIAGRAMA EN ÁRBOL

- Si la quiniela fuera de 1 partido los resultados posibles serían:

Si la quiniela fuera de 2 partidos los resultados posibles serían:



Si la quiniela fuera de 3 partidos los resultados posibles serían:

El número de quinielas al pasar de un problema parcial al siguiente queda multiplicado por 3. Por ejemplo, si el número de partidos es 5 el número de quinielas necesarias es $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

GENERALIZAR LOS RESULTADOS PARCIALES

- Los resultados parciales sucesivos pueden escribirse así:

Para 1 partido: 3

Para 2 partidos: $3 \cdot 3 = 3^2$

Para 3 partidos: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$

Para 4 partidos: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ ...

Para 14 partidos: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 = 3^{14}$

El número de quinielas para n partidos es 3^n. Por ejemplo, para el «pleno al 15» son necesarias 3^{15} quinielas.

Aquí, para sacar la ley que permite escribir el resultado, y para escribirlo de una manera sencilla y rápida, es esencial el cálculo de potencias.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Escribe como potencia única:

a) $6^5 \cdot 6^2 \cdot 6^3$ $\quad 8^7 \cdot 8^5$
b) $(-3)^5 \cdot (-3)^4$ $\quad 5^8 : 5^3$
c) $(-x)^2 \cdot (-x)^5$ $\quad x^9 : x^7$

2 Escribe como potencia única:

a) $7^2 \cdot 6^2 \cdot 10^2$ $\quad 7^3 \cdot 6^3$
b) $(-3)^2 \cdot 6^2$ $\quad (-3)^3 \cdot 7^3$
c) $(-72)^2 : 6^2$ $\quad (-75)^3 : 5^3$
d) $(-12)^2 : (-4)^2$ $\quad (-28)^3 : (-4)^3$

3 Escribe como potencia única estos productos:

a) $7^{-2} \cdot 7^3$ $\quad 6^{-2} \cdot 6^{-5}$ $\quad 9^0 \cdot 9^3$
b) $10^{20} \cdot 10^4$ $\quad 10^{-20} \cdot 10^4$ $\quad 10^{-20} \cdot 10^{-4}$

4 Escribe como potencia única:

a) $3^{-2} : 3^3$ $\quad 6^{-2} : 6^{-5}$ $\quad 9^0 : 9^3$
b) $40^{-3} \cdot 10^{-3}$ $\quad 20^{-2} : 10^{-2}$ $\quad 10^{-20} : 10^{-4}$
c) $(12^{-7})^3$ $\quad (6^{-2})^{-5}$ $\quad (17^0)^3$

5 Calcula las siguientes expresiones:

a) $2^2 - 4^2 : 8 + 3^0$
b) $2 \cdot 3^2 - 5^2 : 5 + 5^3$
c) $3^{-1} \cdot 3^3 - 3^0 + 1 - 25^1$
d) $3^3 : 3 - 1^0 - 3^2 : 2^{-1}$

6 Escribe en notación científica los números siguientes e indica su orden de magnitud:

a) 1 230 000 000 000 000
b) 0,000 000 000 001 230
c) 14 billones de euros.
d) 150 millones de dólares.

7 Escribe en notación ordinaria los siguientes números:

a) $1{,}23 \cdot 10^6$ $\quad$ c) $6{,}78 \cdot 10^{-4}$
b) $3{,}215 \cdot 10^{11}$ $\quad$ d) $4{,}56 \cdot 10^{-9}$

8 Determina entre qué números enteros se encuentra la raíz cuadrada positiva de:

a) 17 $\quad$ 50 $\quad$ 105 $\quad$ 420
b) 3 025 $\quad$ 9 604 $\quad$ 23,4 $\quad$ 97,8

9 Escribe en varias formas radicales 8 y $\sqrt{8}$.

10 Simplifica estos radicales:

a) $\sqrt[6]{2^4}$ $\quad$ d) $\sqrt[8]{5^4}$
b) $\sqrt[6]{125}$ $\quad$ e) $\sqrt[9]{27}$
c) $\sqrt[4]{3^2}$ $\quad$ f) $\sqrt[5]{1\,024}$

11 Simplifica las siguientes potencias:

a) $2^{\frac{4}{3}}$ $\quad$ c) $125^{\frac{1}{3}}$
b) $7^{\frac{4}{11}}$ $\quad$ d) $1\,024^{\frac{1}{5}}$

12 Reduce los siguientes radicales a índice común:

a) $\sqrt[3]{7}, \sqrt[5]{4}, \sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[5]{7}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}$
c) $\sqrt[3]{8}, \sqrt[6]{15}, \sqrt[4]{9}$

13 Di si los siguientes números son iguales o no:

a) $\sqrt{9}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[4]{81}, \sqrt[5]{243}$
b) $\sqrt{2}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{8}, \sqrt[8]{16}$

14 ¿Cuál es mayor de estos radicales: $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}$?

15 Calcula los siguientes productos:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ $\quad$ c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$
b) $\sqrt{2} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{15}$

16 Introduce en el radical los números que están fuera:

a) $2\sqrt{2}, 7\sqrt{3}, 2\sqrt{5}, 11\sqrt{7}$
b) $3\sqrt{2}, 3\sqrt{3}, 5\sqrt{5}, 6\sqrt{7}$

ACTIVIDADES

17 Saca fuera del radical todos los factores posibles:

a) $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{50}$
b) $\sqrt{98}$, $\sqrt{128}$, $\sqrt{162}$, $\sqrt{200}$

18 Calcula los siguientes cocientes de radicales:

a) $\sqrt{32} : \sqrt{2}$, $\sqrt{8} : \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{9}$
b) $\sqrt{15} : \sqrt{3}$, $\sqrt{3} : \sqrt{4}$, $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{5}$
c) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{32}$, $\sqrt{8} : \sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{9} : \sqrt[6]{3}$

19 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$
b) $\sqrt{20} + \sqrt{5} + \sqrt{500} - \sqrt{80}$
c) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$
d) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$

20 Realiza las siguientes operaciones utilizando radicales y potencias de exponente fraccionario:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{15}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{3}$

21 Realiza las siguientes operaciones:

a) $(2 + 3\sqrt{5})\,(3 - 8\sqrt{5})$
b) $(2 + 3\sqrt{5})^2$
c) $(2 - 3\sqrt{5})^2$

22 Escribe en forma radical los siguientes números:

a) $2^{\frac{1}{2}}$, $7^{\frac{4}{3}}$, $5^{0.5}$, $12^{0.2}$ b) $7^{-\frac{1}{2}}$, $9^{-\frac{1}{3}}$, $5^{-\frac{10}{3}}$, $8^{-\frac{1}{3}}$

23 Escribe como potencias de exponente fraccionario los siguientes radicales:

a) $\sqrt{3}$ $\sqrt[3]{5^2}$ $\sqrt[3]{13^5}$ $\sqrt[6]{5^{12}}$
b) $\sqrt{7^{-1}}$ $\sqrt[3]{9^{-2}}$ $\sqrt[10]{13^5}$ $\sqrt[6]{5^{-2}}$

24 Escribe como potencias los siguientes números:

a) $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$
b) $\sqrt{a^{-1}}$, $\sqrt[3]{b^{-2}}$

25 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{\dfrac{3}{16}} - 4\sqrt{12}$ c) $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{8}}$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{18}{75}}$ d) $\sqrt{\dfrac{5}{12}} - \sqrt{\dfrac{10}{6}}$

26 Calcula los valores de las siguientes potencias:

a) $16^{\frac{3}{4}}$, $81^{0.25}$, $625^{\frac{5}{12}}$
b) $\left(8^{\frac{28}{21}}\right)^{\frac{15}{14}}$, $27^{0.666...}$
c) $25^{\frac{3}{2}}$, $32^{\frac{4}{5}}$
d) $\left(7^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{12}{4}}$, $\left(8^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$

27 Escribe en forma potencial las siguientes expresiones:

a) $5^x \cdot 7^x \cdot 2^x$ c) $\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ d) $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}}$

PROBLEMAS PARA APLICAR

28 Escribe como potencia los resultados de lanzar 2, 3 y 4 monedas. ¿Puedes inducir el resultado de lanzar 10 monedas?

29 El volumen de un cubo es 24 cm³. ¿Cuánto vale el volumen del cubo cuyo lado es doble? Resuelve el problema sin calcular el valor de dicho lado.

30 Se sabe que el cociente de dos números es 13. ¿Cuánto vale el cociente de sus cuadrados?

31 Un cubo tiene 729 cm³ de volumen. Halla la arista del cubo y la suma de las áreas de todas sus caras.

32 El área de un cuadrado mide 50 cm². Sin calcular el valor de la diagonal, ¿cuál es el área del cuadrado construido sobre su diagonal?

ACTIVIDADES

33 Expresa en notación potencial o científica los segundos de un año.

34 Calcula los kilómetros que recorre la luz en un año. Escríbelo en notación científica con dos decimales. (Un año, 365 días; velocidad de la luz, 300 000 km/s).

35 Las distancias de la Tierra a la Luna y al Sol son, en un momento dado, $4 \cdot 10^5$ km y $1,5 \cdot 10^8$ km, respectivamente. ¿Cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que a la Luna?

36 El átomo de hidrógeno pesa $1,66 \cdot 10^{-24}$ g. ¿Cuántos se necesitan para obtener 1,66 kg?

37 El periodo de la Tierra en su órbita alrededor del Sol es $3,16 \cdot 10^7$ s (es decir, un año); el periodo de Plutón es $7,82 \cdot 10^9$ s. ¿Cuántos años tarda Plutón en recorrer su órbita alrededor del Sol?

38 La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ kg, y la del Sol, $1,98 \cdot 10^{30}$ kg. ¿Cuántas veces es mayor el Sol que la Tierra?

39 Un paramecio mide $2,5 \cdot 10^{-5}$ m. Si estuvieran colocados en línea recta, ¿qué longitud alcanzaría 1 millón de paramecios?

40 En un aula del instituto hay 6 tubos fluorescentes que se encienden y apagan con 6 llaves. ¿Cuántas iluminaciones distintas puede haber?

41 Con un abecedario de 26 letras se forman siglas de 2, 3, 4,..., n letras. ¿Cuántas siglas de 2, 3, 4, ... n se podrán formar?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

42 Tienes la potencia 7^n.

a) ¿En cuánto aumenta si añades a su exponente una unidad?
b) ¿En cuánto disminuye si restas a su exponente una unidad?

43 El cuadrado de un número, ¿es siempre mayor que dicho número? Razónalo con ejemplos.

44 La raíz cuadrada de un número, ¿es siempre menor que dicho número? Razona la respuesta con ejemplos.

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

45 Si a un número x lo multiplicamos por 2, ¿cuánto aumenta su cuadrado? ¿Y su cubo? ¿Y si le añadimos una unidad?

46 Cada una de las nueve esferas del Atómium, símbolo de la Expo '58 de Bruselas, tiene un volumen de 523,6 m^3. ¿Podrías calcular el radio?

47 Un estudiante va a comprar espárragos, pidiendo todos los que pueda abarcar con una cuerda. El tendero le cobra 6 euros. Al día siguiente lleva una cuerda de doble longitud, pide los espárragos que pueda abarcar con ella, y pretende pagar 12 euros. El tendero dice que no. ¿Por qué? ¿Cuánto tiene que pagar?

48 Don Aniceto, cantero municipal, diseña una plaza de 2 500 m^2; al alcalde le parece pequeña y quiere duplicar la superficie.

a) ¿Por cuánto hay que multiplicar el lado?
b) ¿Qué sucede si el lado se multiplica por 2?

49 Arquímedes se planteó el siguiente problema: «Si la Tierra estuviera formada por granos de arena, ¿cuántos tendría?». Te damos como datos:

– Longitud del ecuador: 40 000 km.
– Número de granos que entran en un mm^3: 100.

Expresa el resultado en notación científica.

50 Calcula el área aproximada, en metros cuadrados, de la Tierra, tomando como radio 6 500 km y el número $\pi = 3,14$. Escribe luego este valor en forma científica con tres cifras decimales.

MURAL DE MATEMÁTICAS

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

LA POTENCIA DEL COSMOS

En mayo de 1997, astrofísicos de varios lugares del mundo pudieron observar con sus telescopios un espectáculo alucinante: una "super nova". Se trata de una gigantesca explosión cósmica causada por el choque de dos estrellas de neutrones.

El fenómeno se produjo a... 7 000 años luz de la Tierra. En kilómetros, esa distancia es aproximadamente 6.62×10^{16}. Eso quiere decir que, en realidad, la explosión ocurrió hace 7 000 años, y que su brillo ha tardado todo ese tiempo en llegar hasta nosotros viajando a la velocidad de la luz (algo más de mil millones de kilómetros por hora).

CEROS Y MÁS CEROS

Ese mismo choque de estrellas liberó una cantidad de energía equivalente a... **¡5 quintillones de veces la de la primera bomba atómica!** ¿Sabes cuántos ceros necesitas para escribir esa cifra?

EL POETA INCANSABLE

El escritor y matemático francés Raymond Queneau escribió hace unos treinta años un libro titulado "Cien billones de poemas". Y no era una metáfora: su obra contenía, de verdad, 100 000 000 000 000 de poesías distintas... en sólo diez páginas.

La solución al misterio está en el ingenio del poeta matemático. En cada una de las diez páginas del libro escribió un poema de 14 versos con una peculiaridad: cada uno de los versos encajaba perfectamente en cualquier línea de todos los demás poemas. Además hizo que las hojas fueran recortables en tiras (una por cada verso), de forma que todas ellas fueran intercambiables. Pues, efectivamente, la cantidad de poemas distintos que se pueden componer con esos 140 versos es de cien billones. Si te atreves a intentarlo debes saber que, en caso de que puedas componer y leer un poema por minuto, tardarás... ¡¡190 millones de años en acabarlos todos!!

ORDENADORES, MEGAORDENADORES, GIGAORDENADORES...

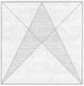
El bit es la unidad básica de información: el equivalente a la elección entre dos posibilidades igualmente probables. En otras palabras, la información que contiene una respuesta con un "sí" y un "no". Los ordenadores utilizan esa lógica de base dos en todas sus operaciones. Por eso su memoria o capacidad de almacenamiento de información se mide en potencias de 2. Como el bit es una unidad muy pequeña se usan sus múltiplos:

Kilobytes = 2^{10} bytes
Megabytes = 2^{20} bytes
Gigabytes = 2^{30} bytes

Hasta hace unos años, los discos duros de los ordenadores personales tenían unos pocos megas de capacidad. Ahora se fabrican ya con varios gigas y, si las cosas siguen evolucionando a esa velocidad, harán falta nuevos múltiplos.

A c t i v i d a d e s

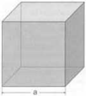
1 Indica en cada figura la fracción determinada por la parte coloreada.



2 ¿Qué parte del cuadrado del margen representa la parte rayada? ¿Y la parte no rayada? ¿Cuánto vale su suma?

3 Rellena con SI o NO la siguiente tabla:

Número	7	$\sqrt{10}$	−2,08	1,1212212221...	$\sqrt{25}$	−2,2424...	$\sqrt{-4}$	$\frac{7}{6}$	$(-7)^0$
Natural									
Entero									
Racional									
Irracional									
Real									



4 Encuentra cinco intervalos que contengan el número $\sqrt{5}$. Indica las aproximaciones por defecto y por exceso. ¿Cuál es el error en cada intervalo?

5 Se mide la arista a de un cubo con una cinta métrica graduada en centímetros y se obtiene:

$$1{,}27 \text{ m} < a < 1{,}28 \text{ m}$$

a) Halla valores aproximados por exceso y por defecto del volumen del cubo.

b) ¿Cuántas cifras del volumen puedes dar con seguridad?

6 En Pinos de la Sierra quieren construir una piscina cuadrada de 200 m². ¿Qué longitud en metros debería tener la piscina? ¿Con cuántos decimales le darías este dato a los albañiles?

7 Expresa en notación científica las siguientes magnitudes:

a) Radio del Sol: 695 990 000 m.

b) Distancia de la Tierra a Neptuno: 4 308 000 000 km.

c) Virus del resfriado: 0,000 000 002 2 m.

d) Peso de un estafilococo: 0,000 000 000 1 g.

8 Un hortelano que llevaba una cantidad de manzanas entró en un vergel que tenía tres guardas:

- Al primer guarda que encontró, por permitirle pasear por el jardín le dio la mitad de las manzanas que llevaba, más dos manzanas.
- Al segundo guarda que en su paseo tropezó, por dejarle ver el huerto le dio la mitad de las manzanas que le quedaban, más dos manzanas.
- Y al tercer guarda, por concederle también estar en el huerto, le dio la mitad de las manzanas que le quedaban, más dos, y le sobró una.

¿Con cuántas manzanas entró y cuántas dio a cada guarda?

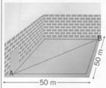
9 Señala sobre la recta real los puntos que corresponden a: $-3b$, $-2a$, $a + b$, $a - b$, $2a + 3b$, sabiendo que a y b están representados así en la recta real:

10 Sin calcular directamente, di si es divisible

$$2\,520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ por } 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

¿Cuál es el cociente?

11 El patio de una cárcel es un cuadrado de 50 m de lado. Un recluso pasea recorriendo el perímetro del cuadrado con una velocidad constante, y otro lo hace sobre la diagonal AB con la misma velocidad. Si parten simultáneamente del punto A, ¿volverán a encontrarse? Razona la respuesta.



12 A pesar de las apariencias, los números

$$x = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$
$$y = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

son números enteros. ¿Cuánto vale x e y?
(Indicación: Elévalos al cuadrado.)

13 Ordena los siguientes números:

$a = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ $\qquad$ $c = 3 + \sqrt{2}$
$b = \sqrt{3} + \sqrt{8}$ $\qquad$ $d = \sqrt{11}$

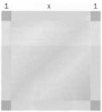
(Indicación: Eleva al cuadrado los números.)

14 Compara las fracciones $\frac{n-1}{n}$ y $\frac{n}{n+1}$. Si encuentras dificultad, empieza por ejemplos particulares, como $\frac{5-1}{5}$ y $\frac{5}{5+1}$, es decir, $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$.

15 Un hombre realiza un trabajo en 5 horas; un joven, en 6 horas, y un muchacho tardaría en hacer lo mismo 8 horas. ¿Cuánto tiempo emplearían trabajando los tres juntos?

Expresiones enteras. Polinomios

4



Un solador tiene que construir un pasillo de 1 m de ancho con losetas cuadradas de 1 m de lado, alrededor del borde de una piscina cuadrada cuyo lado mide x m. Necesita saber el número de losetas que empleará y hallar el área de la superficie del citado pasillo.

Al observar la figura vemos que:

En cada lateral se emplearán x losetas, ya que son de 1 m × 1 m; por tanto, en los 4 laterales se emplearán 4x losetas. Además hemos de añadir 4 losetas de las esquinas.

N.° de losetas = $4x + 4$.

El área del pasillo será:

$$S_{\text{pasillo}} = S_{\text{total}} - S_{\text{piscina}} = (x + 2)^2 - x^2$$

En esta unidad se van a estudiar estas expresiones, denominadas **expresiones algebraicas**, así como algunas de sus operaciones.

1 Expresiones algebraicas

Las siguientes expresiones:

$$3abc,\ 5x^2ty + 2xy;\quad 7\sqrt{xy} + z^3;\quad \frac{x^2 - 3y}{a + b^3}$$

se denominan **expresiones algebraicas**.

Expresión algebraica es toda combinación de números y letras ligadas por los signos de las operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

En la escritura de expresiones algebraicas conviene tener en cuenta lo siguiente:

- El signo de la multiplicación no suele ponerse entre las letras, así:

$$3ab = 3 \cdot a \cdot b = 3 \times a \times b$$

  De este modo se evita confundir la letra x con el signo de la multiplicación.

- El signo + o − que precede a una letra es un signo de operación; no indica que el valor que toma la letra sea positivo o negativo.

Es importante destacar que las operaciones que se realizan con letras son las mismas que las realizadas con números y cumplen idénticas reglas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Recordar la expresión algebraica que permite hallar:**

a) **Área del triángulo:** $S = \frac{b \cdot h}{2}$, donde b es la base y h la altura.

b) **Área del cuadrado:** $S = l^2$, donde l es el lado del cuadrado.

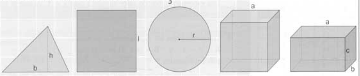
c) **Longitud de la circunferencia:** $L = 2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia.

d) **Área del círculo:** $S = \pi r^2$, donde r es el radio del círculo.

e) **Volumen del cubo:** $V = a^3$, donde a es la arista del cubo.

f) **Volumen del ortoedro:** $V = abc$, donde a es el largo, b el ancho y c el alto.

g) **Media aritmética de tres números:** $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$



$S = \frac{b \cdot h}{2}$ $S = l^2$ $L = 2\pi r$, $S = \pi r^2$ $V = a^3$ $V = abc$

2 Valor numérico de una expresión algebraica. Expresiones equivalentes

❖ Valor numérico de una expresión algebraica

El área de un rectángulo de base b y altura h es $S = bh$.

Si $b = 7$ m y $h = 8$ m, el área del rectángulo es $S = 7 \cdot 8 = 56$ m².

56 es el valor numérico de la expresión algebraica $S = bh$ cuando se sustituye b por 7 y h por 8.

Para otros valores de b y h la expresión dada tomará otros valores numéricos.

Valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras de la misma por números determinados y efectuar las operaciones indicadas en la expresión.

❖ Expresiones algebraicas equivalentes

Consideremos las siguientes expresiones algebraicas:

$$A = 2(x + y),\ B = 2x + 2y$$

Si damos valores cualesquiera a las letras x e y, ambas expresiones tienen el mismo valor numérico. Se dice que A y B son **expresiones equivalentes**.

Dos expresiones algebraicas son **equivalentes** si tienen el mismo valor numérico para cualquier valor que se le asigne a las letras. También se llaman **identidades**.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Hallar el valor numérico de la expresión algebraica $5x^2yz^3$, para $x = 1$; $y = 3$; $z = -1$**

$$5 \cdot 1^2 \cdot 3 \cdot (-1)^3 = -15$$

3 **Hallar el valor numérico de la expresión algebraica $\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ para**

a) $x = 3$ b) $x = 1$

a) $\dfrac{3^2 + 3 + 1}{3 - 1} = \dfrac{13}{2}$ b) $\dfrac{1^2 + 1 + 1}{1 - 1} = \dfrac{3}{0}$

Esta expresión carece de valor numérico para $x = 1$, ya que la fracción $\dfrac{3}{0}$ no tiene sentido.

4 **Comprobar que las expresiones algebraicas**
$A = x^2 - 1$ y $B = (x + 1)(x - 1)$
son equivalentes.

Para cualquier valor que demos a x, ambas expresiones tienen el mismo valor numérico, ya que $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

Valores numéricos de las expresiones algebraicas del ejercicio 4.

x	x^2-1	$(x+1)(x-1)$
−6	35	35
−4	15	15
−2	3	3
0	−1	−1
1	0	0
3	8	8
5	24	24
...	...	...

3 Monomios enteros

Las siguientes expresiones algebraicas:

$$4x^3, \quad -9abx, \quad 3x^2$$

se denominan **monomios enteros**.

> Un **monomio entero** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones con letras que intervienen son la **multiplicación** y la **potenciación** de **exponente natural**.

No son monomios enteros:

$$2ax^{-3}, \quad 3a\sqrt{x} = 3ax^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{4xy^2}{7x^3z^4}, \quad 2x + 3, \quad 3x^2 + 2x + 5$$

Todo monomio está formado por:

- una **parte numérica** llamada **coeficiente**, y
- una **parte literal** constituida por letras y sus exponentes.

El **grado** de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

El **grado** de un monomio respecto de una variable es el exponente de esa variable.

El **grado** del monomio $7x^2ytm^3$ es $2 + 1 + 1 + 3 = 7$, y además es de:

- grado 2 respecto de la variable x
- grado 1 respecto de la variable y
- grado 1 respecto de la variable t
- grado 3 respecto de la variable m

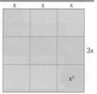
Dos monomios son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal. Las letras pueden estar cambiadas de orden.

- Los monomios $7x^2yz^3$ y $-3yx^2z^3$ son semejantes, ya que tienen la misma parte literal.
- Los monomios $7x^2yz^3$ y $7x^2yz^2$ no son semejantes, ya que no tienen la misma parte literal.

Si dos monomios semejantes tienen el mismo coeficiente son **iguales** (o equivalentes); por ejemplo: $7x^2yz^3$ y $7yx^2z^3$.

Si dos monomios semejantes tienen coeficientes opuestos se llaman opuestos; por ejemplo: $7x^2yz^3$ y $-7yz^3x^2$.

NO CONFUNDIR EL MONOMIO



Área = $(3x)^2 = 9x^2$

Área = $3x^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

5 **Indicar cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios enteros:**

a) $6xy^3$ b) $2\frac{x}{y}z^3$ c) $\frac{3}{2}xyz^2$ d) $x^{-3}y$ e) $2\sqrt{yz}$

Son enteros los monomios de los apartados a y c. El resto son monomios no enteros.

4 Polinomios enteros

Las siguientes expresiones algebraicas:

$$3x + 2y, \quad a^2 + 2ab + b^2, \quad x^3 - 3xz^4 - 7t$$

se denominan **polinomios enteros**.

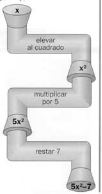
> Un **polinomio entero** es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de dos o más monomios enteros. Un polinomio puede tener una o más variables.

No son polinomios enteros:

$$\frac{4x + y}{x^2}, \quad \frac{2}{x + z}, \quad \frac{t + y - 1}{z}$$

LOS POLINOMIOS SON COMO MÁQUINAS

Observar qué hace el polinomio $5x^2 - 7$.



Cada uno de los monomios que componen un polinomio se llama **término**.

Si el polinomio tiene 2, 3, 4... términos se llama **binomio, trinomio, cuatrinomio...**, respectivamente.

El **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de los términos que lo forman:

$$6 + 3x^2 - \frac{5}{2}x^6 - 7x^4 \text{ es de grado } 6$$

$$2x^3y - 5xy^2 + x - 1 \text{ es de grado } 4$$

El término de grado **0** del polinomio (si existe) es un número, y se llama **término independiente**.

Un polinomio se llama **ordenado**, respecto de una variable, cuando los grados de los términos van creciendo o decreciendo:

$$7x^5 - 5x^4 + 11x^3 + 45x^2 + 23x - 7 \qquad \text{(decreciente)}$$

$$-7 + 23x + 45x^2 + 11x^3 - 5x^4 + 7x^5 \qquad \text{(creciente)}$$

> **Dos polinomios son iguales** cuando los términos que los forman son iguales.

Por ejemplo, si $3x + 5 = ax + b$, entonces $a = 3$ y $b = 5$.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Indicar el nombre y el grado de las siguientes expresiones algebraicas:**

a) $x^2 - 3x - 2$ **b) $x^3 - y^4$** **c) $5x^2$** **d) $7x + 3xy^3$**

a) Trinomio, grado 2. b) y d) Binomio, grado 4. c) Monomio, grado 2.

7 **Hallar los valores de a, b y c para que el polinomio $3x^2 - 5x + \frac{7}{3}$ sea igual al polinomio $ax^2 + bx + c$.**

Para que los polinomios sean iguales deben coincidir los coeficientes de los términos semejantes:

$$a = 3; \quad b = -5 \quad y \quad c = \frac{7}{3}$$

5 Suma y diferencia de polinomios

❖ Suma y diferencia de monomios

En general, dos monomios no se pueden sumar o restar, en el sentido de que su suma o diferencia sea otro monomio. Para que esto sea posible tienen que ser **monomios semejantes**. Así:

$$3x^2y + 6x^2y = (3 + 6)x^2y = 9x^2y$$
$$3x^2y - 6x^2y = (3 - 6)x^2y = -3x^2y$$

La **suma** o **diferencia** de dos monomios **semejantes** es otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma o diferencia de coeficientes.

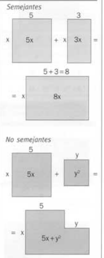
Reducir términos semejantes es sumarlos o restarlos.

Los monomios $3x^2y$ y $6xy^2$ no son semejantes, y no se pueden reducir para formar un nuevo monomio; su suma o diferencia se deja indicada formando los polinomios:

$$3x^2y + 6xy^2,\ 3x^2y - 6xy^2$$

La **suma** o **diferencia** de dos monomios **no semejantes** es el polinomio formado por la suma o diferencia indicada de dichos monomios.

INTERPRETACIÓN DE LA SUMA DE MONOMIOS



❖ Suma y diferencia de polinomios

La **suma** o **diferencia** de dos polinomios es otro polinomio formado por la suma o diferencia indicada de los términos no semejantes de ambos y por la suma o diferencia de los términos semejantes.

$$(5x^2 + 2x + 3) + (7x^3 - x^2 + 5x - 1) = 7x^3 + 4x^2 + 7x + 2$$
$$(5x^2 + 2x + 3) - (7x^3 - x^2 + 5x - 1) =$$
$$= 5x^2 + 2x + 3 - 7x^3 + x^2 - 5x + 1 =$$
$$= -7x^3 + 6x^2 - 3x - 4$$

EJERCICIOS RESUELTOS

8 Efectuar las siguientes sumas y diferencias de polinomios:

a) $(3x^2 - 5x + 1) + (x^2 - 7x - 3) = 4x^2 - 12x - 2$

b) $(3x^2 - 5x + 1) - (x^2 - 7x - 3) = 2x^2 + 2x + 4$

c) $(3x^2 - 1) + (x^3 - 7x - 5x^2 - 3) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

d) $(3x^2 - 1) - (x^3 - 7x - 5x^2 - 3) = -x^3 + 8x^2 + 7x + 2$

e) $(x^3 - 3x^2 + x - 1) + \left(6x^4 - \frac{1}{2}x\right) = 6x^4 + x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

f) $(x^3 - 3x^2 + x - 1) - \left(6x^4 - \frac{1}{2}x\right) = -6x^4 + x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

RECUERDA

El signo menos delante de un paréntesis cambia el signo de todos los términos que se encuentren dentro del paréntesis.

$$x^3 - (5x^3 + 2x^2 - x + 7)$$
$$= x^3 - 5x^3 - 2x^2 + x - 7$$
$$= -5x^3 - x^2 + x - 7$$

6 Producto de polinomios

RECUERDA

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

❖ Producto de dos monomios

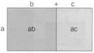
Vamos a multiplicar los monomios $4x^2yt$ y $5xy^3t^2z$.

$$4x^2yt \cdot 5xy^3zt^2 = 20x^3y^4zt^3$$

El producto de dos monomios es otro monomio que tiene:

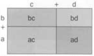
- como **coeficiente**, el producto de los coeficientes;
- como **parte literal**, las letras que aparecen en los monomios, con exponente igual a la suma de los exponentes de los factores.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE ALGUNOS PRODUCTOS



$a(b+c) = ab + ac$

Propiedad distributiva



$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

❖ Producto de polinomios

La multiplicación de polinomios se basa en el producto de monomios y en la propiedad distributiva.

El **producto de dos polinomios** es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primero por cada término del segundo, y reduciendo luego los términos semejantes.

EJERCICIOS RESUELTOS

9 $2x^2yz \cdot 4xty = 8x^3y^2zt$

10 $ax^n \cdot bx^m = ab\,x^{n+m}$

11 $-\dfrac{2}{3}xy^2m \cdot \dfrac{4}{7}x^3y^4t^2 = -\dfrac{8}{21}x^4y^6mt^2$

12 **Realizar las siguientes multiplicaciones:**

a) $a(x - y + t) = ax - ay + at$

b) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

c) $(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$

d) $(2xy - 3x^2)(2x + 5y) = 4x^2y + 10xy^2 - 6x^3 - 15x^2y =$
$= -6x^3 - 11x^2y + 10xy^2$

e) $(7x^3 - 5x + 2)(2x^2 + 5x - 1)$

Una disposición práctica para multiplicar polinomios de muchos términos es la siguiente:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 7x^3 & +\ 0x^2 & -\ 5x & +\ 2 \\
 & & & 2x^2 & +\ 5x & -\ 1 \\
\hline
 & & -\ 7x^3 & +\ 0x^2 & +\ 5x & -\ 2 \\
 & 35x^4 & +\ 0x^3 & -\ 25x^2 & +\ 10x & \\
14x^5 & +\ 0x^4 & -\ 10x^3 & +\ 4x^2 & & \\
\hline
14x^5 & +\ 35x^4 & -\ 17x^3 & -\ 21x^2 & +\ 15x & -\ 2
\end{array}$$

7 Potencias de polinomios. Igualdades notables

Potencias de polinomios

Las potencias de expresiones algebraicas se definen de la misma forma que las potencias de números reales. Para que una potencia sea una expresión algebraica **entera** el **exponente** debe ser un número **natural**.

La **potencia enésima** ($n > 1$) de un polinomio es igual al polinomio que se obtiene al multiplicar por sí mismo tantas veces la base como indica el exponente.

Si P es un polinomio cualquiera y n un número natural, se verifica:

$$P^0 = 1,\ P^1 = P,\ P^2 = P \cdot P,\ P^n = P \ldots P\ (n > 1)$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de potencias de polinomios, como el cuadrado de un binomio y el cubo de un binomio. Estas potencias se denominan **igualdades notables**.

Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

A la vista de ambas igualdades, podemos observar que los desarrollos coinciden. Tan solo varía el signo del término 2ab, que resulta negativo en el segundo caso, por ser $a(-b) = -ab$; la fórmula así es única.

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

EJERCICIOS RESUELTOS

13 Desarrollar las siguientes expresiones:

a) $(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

b) $(3x + 2a^2)^2 = 9x^2 + 12xa^2 + 4a^4$

c) $(2x^3 + 6x)^2 = 4x^6 + 24x^4 + 36x^2$

d) $(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

e) $(3x - 2a^2)^2 = 9x^2 - 12xa^2 + 4a^4$

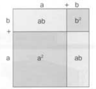
f) $(2x^3 - 6x)^2 = 4x^6 - 24x^4 + 36x^2$

CONVIENE RECORDAR

	REGLAS DE LAS POTENCIAS
1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2	$a^m : a^n = a^{m-n}$
3	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
4	$(a : b)^m = a^m : b^m$
5	$(a^m)^n = a^{mn}$

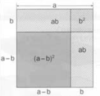
Estas propiedades facilitarán el cálculo de potencias de polinomios.

CUADRADO DE LA SUMA



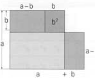
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

CUADRADO DE LA DIFERENCIA



$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

SUMA POR DIFERENCIA



$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

❖ Suma por diferencia de dos monomios

Consideramos dos monomios, a y b, y efectuamos el producto de su suma por su diferencia.

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

La suma de dos monomios por su diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el cuadrado del segundo.

EJERCICIOS RESUELTOS

14 a) $(3x + 2a^2)\,(3x - 2a^2) = 9x^2 - 4a^4$

b) $(2x^3 - 6x)\,(2x^3 + 6x) = 4x^6 - 36x^2$

❖ Cubo de un binomio

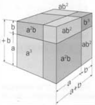
Consideramos dos binomios: a + b y a − b. Multiplicamos cada uno por su cuadrado.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)\,(a + b)^2 = (a + b)\,(a^2 + 2ab + b^2)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

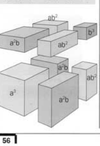
$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= [a + (-b)]^3\\ &= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

Los desarrollos son iguales, salvo los signos de los términos $3a^2b$ y b^3, que se obtienen al multiplicar los términos del binomio teniendo en cuenta los signos.

CUBO DE UNA SUMA



$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$



El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más tres veces el cuadrado del primero por el segundo, más tres veces el primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

EJERCICIOS RESUELTOS

15 a) $(2x^3 - 6x)^3 = 8x^9 - 72x^7 + 216x^5 - 216x^3$

b) $(3x + 2a^2)^3 = 27x^3 + 54x^2a^2 + 36xa^4 + 8a^6$

En la práctica: Si no recuerdas alguna de estas fórmulas, opera directamente aplicando las reglas del producto. Siempre debes tener presente la propiedad distributiva:

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

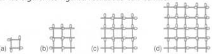
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Reducir la dificultad del problema estudiando casos más sencillos.
- Tratar de generalizar.
- Comprobar el resultado obtenido.

PROBLEMA

Observar las siguientes figuras realizadas con cerillas:



¿Cuántas cerillas se necesitarán para construir una figura análoga a las anteriores con n cuadrados en cada lado?

REDUCIR LA DIFICULTAD

- En la figura a hay 2 tramos horizontales de 1 cerilla. Por tanto, se necesitan 2 cerillas y otras 2 para los 2 tramos verticales; es decir:

  $$2 \cdot 2 \cdot 1 \text{ cerillas} = 4 \text{ cerillas}$$

  En la figura b hay 3 tramos horizontales de 2 cerillas. Por tanto, se necesitan $3 \cdot 2$ cerillas y otras tantas para los tramos verticales; es decir:

  $$2 \cdot 3 \cdot 2 \text{ cerillas} = 12 \text{ cerillas}$$

  En la figura c hay 4 tramos horizontales de 3 cerillas. Por tanto, se necesitan $4 \cdot 3$ cerillas y otras tantas para los tramos verticales; es decir:

  $$2 \cdot 4 \cdot 3 \text{ cerillas} = 24 \text{ cerillas}$$

  En la figura d hay 5 tramos horizontales de 4 cerillas. Por tanto, se necesitan $5 \cdot 4$ cerillas y otras tantas para los tramos verticales; es decir:

  $$2 \cdot 5 \cdot 4 \text{ cerillas} = 40 \text{ cerillas}$$

TRATAR DE GENERALIZAR

- En la figura (n) habrá $n + 1$ tramos horizontales de n cerillas. Por tanto, se necesitan $(n + 1)$ n cerillas y otras tantas para los tramos verticales; es decir, se necesitan $2\,(n + 1)\,n$ cerillas.

  Así pues, para la figura que ocupe el lugar enésimo se necesitarán:

  $$2\,(n + 1)\,n \text{ cerillas}$$

COMPROBAR EL RESULTADO OBTENIDO

- Vamos a comprobar si el resultado obtenido es correcto.

  Para la figura a, sustituyendo en $2\,(n + 1)\,n$, tenemos:

  $n = 1$: $[2\,(1 + 1)]\,1 = 4$ cerillas

  Para la figura b, sustituyendo en $2\,(n + 1)\,n$, tenemos:

  $n = 2$: $[2\,(2 + 1)]\,2 = 12$ cerillas

  Para la figura c, sustituyendo en $2\,(n + 1)\,n$, tenemos:

  $n = 3$: $[2\,(3 + 1)]\,3 = 24$ cerillas

  Para la figura d, sustituyendo en $2\,(n + 1)\,n$, tenemos:

  $n = 4$: $[2\,(4 + 1)]\,4 = 40$ cerillas

  Por tanto, se confirma que la expresión obtenida es correcta.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores que se indican:

a) $x^2 + y^2$ para $x = 2$, $y = 5$
b) $a^2 - b^2$ para $a = 15$, $b = 5$
c) $(1 - 2x)(1 - 2x)x$ para $x = 0{,}2$
d) πr^2 para $r = 5$, $r = 10$, $r = 100$

2 Dados los monomios

$A = 5x^2$; $B = 3x$; $C = 7x^3$; $D = 2x^2$

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $A + D$
b) $A - D$
c) $A + B$
d) $A \cdot C$
e) $A \cdot D$
f) $B \cdot D$

3 Dados los polinomios

$P(x) = 5x^2 - 3x + 2$; $R(x) = x + 1$; $Q(x) = 2x^3 - 1$

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $P(x) + Q(x)$
b) $P(x) - Q(x)$
c) $P(x) \cdot Q(x)$
d) $P(x) - R(x)$
e) $R(x) - Q(x)$
f) $P(x) \cdot R(x)$

4 Efectúa las sumas y diferencias que se indican y reduce los términos semejantes:

a) $(a - b) - (b + c - d) + (2b - a)$
b) $x + [(y - x) - (y - z)]$
c) $a^2 - (b^2 - c^2) + b^2 - (a^2 + c^2) - c^2 - (a^2 - b^2)$
d) $(a + 2b - 6a) - [3b - (6a - 6b)]$
e) $(x + y - z) - (x - y + z) + (-x + y + z) - (-x - y + z)$
f) $(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (3x^3 - x^2 - x - 7) - (x^3 - 4x^2 + 2x + 8)$

5 Calcula las siguientes potencias:

a) $x \cdot x$
b) $x^2 \cdot x^3$
c) $(x^2)^5$
d) $[(a^2)^3]^8$
e) $[(-a^2)^3]^4$
f) $(a^2 b^3)^7$

6 ¿Verdadero o falso? Razónalo.

a) $x \cdot x = 2x$
b) $(a^2)^4 = a^6$
c) $x^3 = 3x$
d) $x^2 + x^3 = x^5$
e) $x^2 \cdot x^3 = x^5$
f) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

7 Haz los productos que se indican aplicando la propiedad distributiva y reduce los términos semejantes:

a) $(a + b)(a + b)$
b) $(a + b)(a - b)$
c) $(a + b + c)(a + b - c)$
d) $(a + b - c)(a - b + c)$
e) $(x - a)(x - b)(x - c)$

8 Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $(x - a)(x - b) + (x - c)(x - d)$
b) $(a + b)(b + c) - (c + b)(d + a)$
c) $(a + b)x + (b + c)y - [(a - b)x - (b - c)y]$
d) $(a + b - c)(a + b) + (a - b + c)(a + c)$
e) $(a - b)(a + b - c) + (b - c)(b + c - a)$

9 Calcula los cuadrados de los binomios que se indican y reduce luego los términos semejantes:

a) $(x + a)^2$
b) $(x - m)^2$
c) $(2a + 9b)^2$
d) $(x^2 + 8)^2$
e) $(x^6 + a)^2$
f) $(3a^2 - 10)^2$
g) $(7 + x)^2$
h) $(a^m + y^n)^2$

10 Calcula directamente los productos de las sumas por diferencias:

a) $(a + b)(a - b)$
b) $(x + 2a)(x - 2a)$
c) $(3x + 1)(3x - 1)$
d) $(x^2y^3 + 2)(x^2y^3 - 2)$

11 Calcula el valor de la siguiente expresión sin realizarla. Observa cómo son entre sí los paréntesis. Si no lo ves puedes hacer las operaciones indicadas.

$$(a + b - c - d)^2 - (c + d - a - b)^2$$

A C T I V I D A D E S

12 Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores que se indican, realizando el cálculo:

a) Directamente.

b) Después de reducir la expresión.

a) $a^2 + 2ab + b^2$ para $a = 7$, $b = 3$
b) $a^2 - 2ab + b^2$ para $a = 7$, $b = 3$
c) $a^2 - b^2$ para $a = 15$, $b = 5$
d) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ para $a = 13$, $b = 3$
e) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ para $a = 13$, $b = 3$

13 En las siguientes relaciones hay errores muy graves en la utilización de la regla de los signos. ¿Cuáles son?

a) $-(x^2 + x - 2) = -x^2 + x - 2$

b) $-\dfrac{3x^2 - 9x}{3} = -x^2 - 3x$

14 En las siguientes relaciones hay errores muy graves en la utilización de la propiedad distributiva. ¿Cuáles son?

a) $x(x + y) = x^2 + y$
b) $(3a + 2)(1 - b) = 3a - 2b$
c) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
d) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$
e) $2x + 3(3x - 1) = 6x^2 - 2x + 9x - 3$

15 Completa las siguientes expresiones para que sean cuadrados perfectos:

a) $9x^2 + 24x + ...$ d) $x^2 - 6x + ...$
b) $x^2 + 2x + ...$ e) $9x^2 + ... + 16$
c) $x^2 - 2x + ...$ f) $4x^2 + ... + 9$

16 Saca factor común en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x^2 - 5x^4$ d) $a^2 + ab + ac + bc$
b) $5x - 25x^2y$ e) $ax - ay - bx + by$
c) $7x^3 - 14x^6$ f) $a^2 - c^2 + acd + abc$

PROBLEMAS PARA APLICAR

17 En el trinomio $ax^2 + bx + c$, calcula $b^2 - 4ac$ en los siguientes casos:

a) $x^2 - 5x + 6$ c) $3x^2 - 8x + 5$
b) $9x^2 - 24x + 16$ d) $x^2 + 3x - 10$

18 Observa que:

$8 \cdot 8 - 1 = 7 \cdot 9$
$15 \cdot 15 - 1 = 14 \cdot 16$
$31 \cdot 31 - 1 = 30 \cdot 32$

Comprueba si es cierto para otros valores y trata de expresar mediante una identidad algebraica esta situación.

19 Con 40 cm de cuerda se quiere construir distintos rectángulos. ¿Cuál será la expresión general del área de estos rectángulos?

20 La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos, ¿es par o impar? Razónalo.

21 Demuestra que la diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es par.

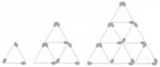
22 Si dos números se diferencian en 7 unidades, la diferencia de sus cuadrados es igual a 7 veces la suma. Razónalo.

23 Observa en un calendario un mes cualquiera; por ejemplo, el siguiente:

L	M	X	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

En cada uno de los recuadros señalados, u otros análogos, trata de hallar las sumas cruzadas y los productos cruzados. ¿Qué observas? Expresa mediante identidades algebraicas los resultados obtenidos.

24 Observa las siguientes figuras. ¿Cuántas cerillas se necesitarán para construir una figura análoga a las anteriores que ocupe el lugar enésimo?



(1) (2) (3)

CUESTIONES PARA ACLARARSE

25 Un polinomio entero, ¿puede tener alguna variable con exponente negativo? Razona la contestación poniendo algún ejemplo.

26 Dos polinomios de segundo grado tienen valores numéricos iguales para tres valores distintos de la variable x. ¿Son equivalentes? ¿Son iguales? Razona la respuesta.

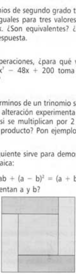
27 Sin hacer operaciones, ¿para qué valor de x la expresión $3x^2 - 48x + 200$ toma el valor numérico 200?

28 Si los tres términos de un trinomio se multiplican por 2, ¿qué alteración experimenta su valor numérico? ¿Y si se multiplican por 2 los tres factores de un producto? Pon ejemplos.

29 La figura siguiente sirve para demostrar la identidad algebraica:

$$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

¿Qué representan a y b?



30 Los valores de a, b, c y d son 1, 2, 3 y 4, pero no en este orden. ¿Cuál será el mayor valor posible de la expresión algebraica $ab + bc + cd + da$?

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

31 Observa las siguientes figuras:

(1) (2) (3) (4)

¿Cuántos puntos tendrá la figura análoga a esta que ocupe el lugar enésimo?

32 Halla el número de diagonales que tienen un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono. ¿Cuántas tendrá un polígono de n lados?

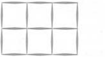
33 Un poco de magia. Piensa un número.

- Multiplícalo por 3.
- Suma al resultado 18.
- Divídelo por 3.
- Súmale 4.

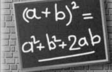
Si dices ahora el resultado, el mago te da una respuesta rápida. ¿Puedes descubrir el truco?

34 Demuestra que todos los triángulos cuyos lados miden a, $\frac{a^2 - x^2}{2x}$, $\frac{a^2 + x^2}{2x}$ son rectángulos, siendo la hipotenusa $\frac{a^2 + x^2}{2x}$.

35 Para formar la siguiente cuadrícula de 2×3 son necesarios 17 palillos. ¿Cuántos se necesitarán para formar una cuadrícula de dimensiones $a \times b$?



MURAL DE MATEMÁTICAS



Hasta los huesos

En las páginas de *El Quijote*, cuando los personajes tienen problemas con sus huesos, van al algebrista a que se los coloque. Pero ¿qué saben los matemáticos de huesos?
En realidad, nada. Lo que sucede es que antiguamente la palabra *álgebra* significaba también el arte de arreglar las dislocaciones de los huesos. Este significado todavía aparece en el Diccionario de la Real Academia.

LA POESÍA DE LOS NÚMEROS

Karl Weierstrass, un famoso matemático alemán del siglo XIX, afirmaba que **"un matemático que no es también un poco poeta no será jamás un matemático completo"**.

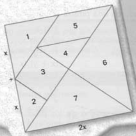
Buscadores de primos

El valor numérico del polinomio $x^2 + x + 41$ es un número primo para
x= 0, 1, 2, 3..., 40.
Esta famosa fórmula se debe a un célebre matemático llamado
Leonard Euler.
En el caso del polinomio
$x^2 - 79x + 1601$ su valor numérico es un número primo para
x= 0, 1, 2..., 80. Comprueba ambos en algunos casos.

"Jugal" con las "folmas"

tangram es un juego tradicional chino de formas, una especie de rompecabezas formado por siete piezas con las que se pueden componer numerosas figuras: desde un bailarín a una casa o un bote. En esta figura tienes las siete piezas formando un cuadrado. Si x es la mitad del lado, se puede obtener el área de cada pieza y comprobar que su suma es $4x^2$.

$A(1) = x^2/2$
$A(2) = x^2/4$
$A(3) = x^2/2$
$A(4) = x^2/4$
$A(5) = x^2/2$
$A(6) = x^2$
$A(7) = x^2$



Igual como dos rayas iguales

14.ꝛe.—15 ==== 71.ꝫ.

20.ꝛe.—.18.ꝗ ==== .102.ꝗ.

26.ꝫ.+10ꝛe ==== 9.ꝫ.—10ꝛe+213.ꝗ.

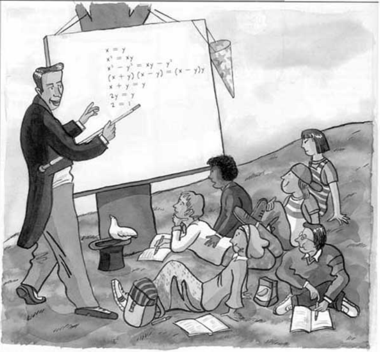
19.ꝛe+192.ꝗ ==== 10ꝫ.+108ꝗ—19ꝛe.

18.ꝛe+24.ꝗ. ==== 8.ꝫ.+2.ꝛe.

Estamos tan acostumbrados a utilizar algunos signos que no nos preguntamos de dónde vienen. Por ejemplo, las dos rayas (=) que indican igualdad. Las empezó a utilizar un matemático inglés llamado Robert Recorde, que vivió hace más de cuatrocientos años. En uno de sus libros cuenta que eligió ese signo porque "dos cosas no pueden ser más iguales que dos rectas paralelas".

División de polinomios. Raíces

5



Un mago está realizando en una pizarra la siguiente demostración:

Parte de la igualdad:	$x = y$
Multiplica por x los dos miembros:	$x^2 = xy$
Resta y^2 a los dos miembros:	$x^2 - y^2 = xy - y^2$
Descompone en factores:	$(x + y)(x - y) = (x - y)y$
Divide los dos miembros por $(x - y)$:	$x + y = y$
Como $x = y$, escribe:	$2y = y$
Divide por y:	$2 = 1$

El resultado es falso, luego alguno de los pasos dados por el mago es incorrecto. ¿Sabrías encontrarlo? Piensa que está relacionado con la división.

1 División de polinomios por monomios

❖ División de monomios

La división de monomios se hace como un cociente de números y de letras, aplicando la regla del cociente de potencias de la misma base.

$$\frac{14x^3y^5z^4}{7x^2y^2z} = \frac{14}{7}\,x^{3-2}\cdot y^{5-2}\cdot z^{4-1} = 2xy^3z^3$$

En este caso se ha obtenido un monomio entero porque el dividendo tiene las mismas letras que el divisor con exponentes iguales o mayores.

En cambio, el cociente

$$\frac{15x^3y}{5xy^2z^3} = \frac{3x^2}{yz^3}$$

no es un monomio entero; se le llama fracción algebraica.

El cociente de dos monomios (si es posible) es igual a otro monomio que tiene:

- como **coeficiente**, el cociente de los coeficientes;
- como **parte literal**, las letras que aparecen en el dividendo, cada una con exponente igual a la diferencia del exponente del dividendo y del divisor.

❖ División de un polinomio por un monomio

En general, no es posible la división de un polinomio por un monomio. Para que lo sea es necesario que **todos los términos del polinomio sean divisibles por el monomio**.

$$\frac{12x^4yz^2 - 4ax^2y^3 + 6x^2y}{2x^2y} = \frac{12x^4yz^2}{2x^2y} - \frac{4ax^2y^3}{2x^2y} + \frac{6x^2y}{2x^2y} =$$
$$= 6x^2z^2 - 2ay^2 + 3$$

La división $\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$ **no es posible:** el segundo término y el tercero no se pueden dividir por x^2.

La división de polinomios consiste, en realidad, en la aplicación de la propiedad distributiva: se divide cada monomio del dividendo por el divisor.

El **cociente de un polinomio por un monomio** (si es posible) es igual a un polinomio cuyos términos son los que se obtienen dividiendo cada término del polinomio por el monomio.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Dividir los siguientes polinomios:**

$$\frac{8a^2bc - 4a^3b^4c^2 + 2abc}{2ab} = 4ac - 2a^2b^3c^2 + c$$

$$(12x^3 - 9x^2 + 3x) : 3x = 4x^2 - 3x + 1$$

CONVIENE RECORDAR

REGLAS DE LAS POTENCIAS
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
$(a : b)^m = a^m : b^m$
$(a^m)^n = a^{mn}$

Estas reglas ayudan a operar con monomios y polinomios.

NO OLVIDAR

Introduce un número cualquiera en tu calculadora.
Divide por cero.
¿Qué obtienes?
Nunca debes olvidar que no se puede dividir por cero.

UNA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Conoces las áreas de estos rectángulos y la altura.
¿Cuánto valen las bases?
¿Qué propiedad aplicas?

2 División entera de polinomios

RECORDAR

Dividendo	Divisor $\neq$ o
Resto	Cociente

En el margen hemos recordado la división entera de números naturales. Esquemáticamente se puede escribir así:

$$\begin{array}{l|l} D & d \neq 0 \\ \hline R & C \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad D = d \cdot C + R \qquad R < d$$

Del mismo modo se realiza la división de polinomios.

Dados los polinomios dividendo D(x) y divisor $d(x) \neq 0$, se trata de hallar otros dos polinomios cociente C(x) y resto R(x), con arreglo al siguiente esquema:

$$\begin{array}{l|l} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad D(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$$

Si el resto $R(x) = 0$ la división se llama **exacta**, y se dice que:

- el polinomio D(x) es **divisible** por d(x) o **múltiplo** de d(x);
- d(x) es un **factor** de D(x), o **divisor** de D(x).

En la práctica, la división entera de polinomios se realiza del mismo modo que la división entera de números naturales, como se puede ver en los siguientes ejercicios.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Realizar la siguiente división:** $(x^3 + 4x^2 + 6) : (x - 4)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 + & 4x^2 + & 0x + & 6 & x - 4 \\ \cline{5-5}
-x^3 + & 4x^2 & & & x^2 + 8x + 32 \\ \cline{1-4}
& 8x^2 + & 0x + & 6 & \\
& -8x^2 + & 32x & & \\ \cline{2-4}
& & 32x + & 6 & \\
& & -32x + & 128 & \\ \cline{3-4}
& & & 134 &
\end{array}$$

Por tanto: $C(x) = x^2 + 8x + 32 \quad R(x) = 134$

3 **Realizar la siguiente división:** $(6x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2) : (2x^2 + 3x - 1)$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 + & 5x^3 - & 7x^2 + & 3x + & 2 & 2x^2 + 3x - 1 \\ \cline{6-6}
-6x^4 - & 9x^3 + & 3x^2 & & & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{1-5}
& -4x^3 - & 4x^2 + & 3x + & 2 & \\
& +4x^3 + & 6x^2 - & 2x & & \\ \cline{2-5}
& & 2x^2 + & x + & 2 & \\
& & -2x^2 - & 3x + & 1 & \\ \cline{3-5}
& & & -2x + & 3 &
\end{array}$$

Por tanto: $C(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad R(x) = -2x + 3$

3 División por $x - a$

Con mucha frecuencia se presentan divisiones de polinomios en las que el divisor es un polinomio de primer grado de la forma $x - a$, donde a es un número real.

Supongamos que queremos realizar la siguiente división:

$$(2x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 1)$$

Por el método general, se tiene:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +3x^2 & & -4 & x+1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 + x - 1 \\ \cline{1-4}
 & x^2 & & & \\
 & -x^2 & -x & & \\ \cline{2-4}
 & & -x & -4 & \\
 & & x & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & & -3 &
\end{array}$$

Pero esta división también se puede disponer más esquemáticamente del siguiente modo: ordenamos el dividendo en orden decreciente, añadiendo los términos que faltan con coeficiente 0.

Dividendo: $2x^3 + 3x^2 + 0x - 4$

Divisor: $x - (-1)$

Coeficientes del dividendo:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & 0 & -4 \\
-1 & & -2 & & \\ \hline
\times & 2 & 1 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & 0 & -4 \\
-1 & & -2 & -1 & 1 \\ \hline
 & 2 & 1 & -1 & -3
\end{array}$$

coeficientes del cociente resto

cociente: $2x^2 + x - 1$

Este método se conoce con el nombre de **regla de Ruffini**.

Ejercicios resueltos

4 $(5x^4 - 2x + 1) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & 0 & 0 & -2 & 1 \\
2 & & 10 & 20 & 40 & 76 \\ \hline
 & 5 & 10 & 20 & 38 & \boxed{77}
\end{array}$$

Cociente: $5x^3 + 10x^2 + 20x + 38$

Resto: 77

5 $(3x^6 + 2) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
-1 & & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 \\ \hline
 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & \boxed{5}
\end{array}$$

Cociente: $3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$

Resto: 5

*Paolo Ruffini (1765-1822). Matemático y médico italiano. Enseñó matemáticas en la escuela militar de Módena. Se le suele conocer por la práctica **regla de Ruffini**, pero hizo aportaciones mucho más importantes al desarrollo de la matemática. Fue el primero en demostrar que la ecuación de quinto grado no se podía resolver por radicales.*

DEBES TENER EN CUENTA QUE...

1. *El grado del cociente es una unidad inferior al grado del dividendo.*
2. *Al dividir un polinomio por $x - a$ el resto es siempre un número.*

4 Teoremas del resto y del factor

TEOREMA DEL RESTO

$$\begin{array}{c|l} P(x) & x - a \\ \hline R & C(x) \end{array}$$

$P(x) = (x - a)\, C(x) + R$
$P(a) = R$

Teorema del resto

Para hallar el valor numérico del polinomio P(x) para $x = a$ basta con sustituir x por a en la expresión del margen:

$$P(a) = (a - a)\, C(a) + R = 0 + R = R$$

Así pues, $R = P(a)$; este resultado se llama **teorema del resto**.

El resto de dividir un polinomio P(x) por $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio P(x) para $x = a$; es decir, $\mathbf{R = P(a)}$.

Este teorema permite obtener el resto de la división de un polinomio por $x - a$ sin necesidad de hacer la división.

TEOREMA DEL FACTOR

$$\begin{array}{c|l} P(x) & x - a \\ \hline 0 & C(x) \end{array}$$

$P(x) = (x - a)\, C(x)$
$P(a) = 0$

Teorema del factor

Observa el esquema del margen.

El resto viene dado por el valor numérico del polinomio para $x = a$. Si la división es exacta, se tiene:

$$P(a) = (a - a)\, C(a) = 0 \quad \text{es decir} \quad R = 0$$

La relación $P(x) = (x - a)\, C(x)$ indica que $x - a$ es un factor o divisor del polinomio. Este resultado se llama **teorema del factor**.

Un polinomio P(x) tiene como factor $\mathbf{x - a}$ si el valor numérico del polinomio para $x = a$ es cero.

Este teorema permite comprobar si $x - a$ es un factor o divisor de un polinomio sin necesidad de hacer la división.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **¿Cuál es el resto de la división $(5x^4 - 3x^2 + 6x - 1) : (x - 1)$?**

El valor numérico de $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 6x - 1$ para $x = 1$ es:
$P(1) = 5 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 1 = 7$; por tanto, el resto es 7.

7 **El resto de la división $(3x^6 + ax - 2) : (x + 2)$ es 184. Hallar el valor a.**

El valor numérico de $P(x) = 3x^6 + ax - 2$ para $x = -2$ es:
$P(-2) = 3\,(-2)^6 + a\,(-2) - 2 = -2a + 190 = 184 \Rightarrow a = 3$

8 **¿El polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 2$ tiene como factor $x - 2$?**

$P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$. Luego, $x - 2$ es un factor de P(x).

9 **El polinomio $x^2 - 5x + 6$ se anula para $x = 2$ y $x = 3$. ¿Qué factores tiene?**

Tiene como factores $x - 2$ y $x - 3$.

5 Raíces de un polinomio. Número de raíces

Raíz de un polinomio

El polinomio $P(x) = x^2 + x - 2$ tiene como factores $x - 1$ y $x + 2$, ya que:

- $P(1) = 1^2 + 1 - 2 = 0$
- $P(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

Por tanto: $P(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

El polinomio $P(x)$ se anula para $x = 1$ y $x = -2$. A estos valores se les llama **raíces del polinomio** o **ceros del polinomio**.

Un número **a es una raíz** del polinomio $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ para $x = a$ es cero.

a es raíz de $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$

Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Matemático, físico y astrónomo alemán. Demostró en su tesis doctoral, leída en 1799, el ***teorema fundamental del álgebra****, mediante consideraciones geométricas. En 1816 publicó dos nuevas demostraciones y cinco años antes de su muerte publicó la cuarta demostración tratando de encontrar procedimientos puramente algebraicos.*

Número máximo de raíces reales

Veamos los siguientes ejemplos:

- $P(x) = 5x - 10$ tiene una raíz: $x = 2$
- $P(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ tiene dos raíces: $x = 1$, $x = -1$
- $P(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$ tiene tres raíces: $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$
- $P(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales, ya que cualquier número real al cuadrado es positivo, y al sumarle 1 seguirá siendo positivo y no podrá ser cero.
- $P(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ tiene solo dos raíces, correspondientes a los factores $x + 1$ y $x - 1$, mientras que el factor $x^2 + 1$ no proporciona ninguna raíz real.

En general, se cumple:

Un polinomio de grado n tiene a lo sumo **n** raíces reales. (Teorema fundamental del álgebra.)

EJERCICIOS RESUELTOS

10 **Comprobar si $x = -3$ y $x = 2$ son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$**

$P(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 - (-3) - 3 = 0$

$P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 - 3 = 35$

$x = -3$ es raíz, ya que $P(-3) = 0$; pero $x = 2$ no es raíz, pues $P(2) \neq 0$.

11 **¿Cuál es el número máximo de raíces reales del polinomio $P(x) = x^{99} - 1$?**

A lo sumo, el polinomio dado tendrá 99 raíces reales.

6 Cálculo de las raíces enteras de un polinomio

El hispano-portugués ***Pedro Nunes*** *(1502-1578) publicó en español un tratado titulado Álgebra. Estuvo fuertemente influenciado por los matemáticos italianos Pacioli, Tartaglia y Cardano.*

Como se ve en estos sellos (Portugal, 1978) emitidos con motivo del cuarto centenario de su muerte, la notación usada por Nunes es muy parecida a la de Pacioli.

Por ejemplo, para sumar los polinomios

$$30 + 15x + 2x^2$$

y

$$3 - 13x + 7x^2$$

disponía así los cálculos:

Observar que:
$co = x$
$ce = x^2$
$cu = x^3$
$\tilde{p} = +$
$\tilde{m} = -$

Hemos visto cómo se puede comprobar si un número conocido es raíz de un polinomio. En general no es fácil encontrar las raíces desconocidas. Vamos a ver una propiedad de las raíces enteras que facilita su búsqueda.

Consideremos, por ejemplo, el polinomio de tercer grado:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si r es una raíz entera de P(x), se verifica $P(r) = ar^3 + br^2 + cr + d = 0$, despejando d se obtiene $d = -ar^3 - br^2 - cr = r(-ar^2 - br - c)$.

Por tanto, d es múltiplo de r $\Leftrightarrow$ r es divisor de d.

La demostración es análoga para otro polinomio de cualquier grado.

Las **raíces enteras** de un polinomio son divisores del término independiente.

EJERCICIOS RESUELTOS

12 Hallar las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Las posibles raíces son: $x = \pm 1$; $x = \pm 2$; $x = \pm 4$

- Para $x = 1$ se tiene: $1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ es raíz.
- Para $x = -1$ se tiene: $(-1)^3 - (-1)^2 - 4(-1) + 4 = 6 \Rightarrow x = -1$ no es raíz.
- Para $x = 2$ se tiene: $2^3 - 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ es raíz.
- Para $x = -2$ se tiene: $(-2)^3 - (-2)^2 - 4(-2) + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ es raíz.

Las raíces enteras son: 1, 2, −2

13 Hallar las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$.

Se saca x factor común: $P(x) = x(x^3 + 2x^2 - x - 2)$

Una raíz es: $x = 0$

Las otras posibles raíces enteras son: $x = \pm 1$; $x = \pm 2$

- Para $x = 1$ se tiene: $1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ es raíz.
- Para $x = -1$ se tiene: $(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ es raíz.
- Para $x = 2$ se tiene: $2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 12 \Rightarrow x = 2$ no es raíz.
- Para $x = -2$ se tiene: $(-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ es raíz.

Las raíces enteras son: 0, 1, −1, −2

14 Hallar las raíces enteras del polinomio $P(x) = x^3 + 4x$.

Se saca x factor común: $P(x) = x(x^2 + 4)$

La única raíz es $x = 0$, pues el binomio $x^2 + 4$ no puede tener raíces reales, ya que no existe ningún número real x que verifique la ecuación $x^2 + 4 = 0$.

7 Factorización de polinomios

Acabamos de ver que el polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$$

tiene las raíces $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$.

Por tanto, los binomios $x - 0$, $x - 1$, $x + 1$, $x + 2$ son factores del polinomio $P(x)$, y podemos escribir el polinomio $P(x)$ del siguiente modo:

$$P(x) = x(x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

Se dice entonces que se ha **factorizado** el polinomio.

Factorizar un polinomio es descomponerlo en dos o más polinomios, no constantes, tales que su producto sea el polinomio dado.

No siempre es posible factorizar un polinomio con conocimientos elementales. En general, se tiene:

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ tiene n raíces reales $r_1, r_2, \ldots, r_n$ se demuestra que la descomposición factorial es:

$$P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

15 **Factorizar el polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$.**

Para la factorización se procede así:

- Posibles raíces enteras: ± 1, ± 2
- Se comprueba directamente cuál de estos números es raíz.

Vemos que las raíces son: $1, -1, -2$

La factorización del polinomio es:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

16 **Factorizar el polinomio $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$.**

- Se iguala el polinomio a cero: $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x = 0$
- Se saca factor común x: $x(x^3 + 3x^2 - x - 3) = 0$
- Una raíz es: $x = 0$
- Se calculan ahora las raíces de $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

Vemos que las cuatro raíces son: $0, 1, -1, -3$

La factorización del polinomio es:

$$(x - 0)(x - 1)(x + 1)(x + 3) = x(x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

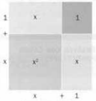
17 **Factorizar el polinomio $4x^3 - 4x^2 - 16x + 16$.**

- Se saca 4 factor común: $4(x^3 - x^2 - 4x + 4)$
- Las posibles raíces enteras son: ± 1, ± 2 y ± 4
- Se comprueba que las raíces son: $2, -2, 1$

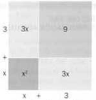
La factorización del polinomio es:

$$4(x - 2)(x + 2)(x - 1)$$

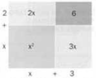
FORMANDO CUADRADOS Y RECTÁNGULOS



$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$



$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$



$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

En estas figuras tienes una interpretación geométrica de la factorización de polinomios de segundo grado.

El polinomio es el área y los factores son los lados.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Ensayar con casos particulares.
- Buscar una simbolización adecuada.
- Utilizar el resultado para encontrar nuevos casos.

PROBLEMA

Con los enteros consecutivos del 1 al 9 se puede formar este cuadrado mágico; se llama así por cumplirse que los números que se encuentran en cada fila, o en cada columna, en cada una de las dos diagonales suman lo mismo:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Encontrar una fórmula general para los cuadrados mágicos de 3 filas y 3 columnas, llamados de orden 3.

ENSAYAR CON CASOS PARTICULARES

- Mediante tanteo formamos algunos cuadrados mágicos sencillos:

9	2	10
8	7	6
4	12	5

9	5	4
1	6	11
8	7	3

13	3	14
11	10	9
6	17	7

BUSCAR UNA SIMBOLIZACIÓN ADECUADA

- Sean a, b y c tres números enteros cualesquiera, y supongamos que la suma de cada línea es 3a.

Una diagonal puede ser:

a + b		
	a	
		a − b

Otra diagonal puede ser:

		a + c
	a	
a − c		

Entonces resulta:

a + b		a + c
	a	
a − c		a − b

UTILIZAR EL RESULTADO PARA ENCONTRAR NUEVOS CASOS

- El resto es fácil, ya que si cada fila debe sumar 3a será:

1.ª fila: $(a + b) + (a + c) + x = 3a$, luego $x = a - (b + c)$

3.ª fila: $(a - c) + (a - b) + y = 3a \Rightarrow y = a + b + c$

Razonando del mismo modo con las columnas, resulta:

a + b	a − (b + c)	a + c
a − (b − c)	a	a + (b − c)
a − c	a + (b + c)	a − b

- Haciendo
$a = 10$
$b = 1$
$c = 3$
se obtiene:

11	6	13
12	10	8
7	14	9

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(x^3 + 4x^2 + 6x) : x$
b) $(x^3 + 3x^2 + 2x - 1) : x$
c) $(4x^3 - 8x^2 - 6x) : 2x$

2 Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4) : (x^2 + x + 2)$
b) $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2)$
c) $(6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7)$

3 Efectúa las siguientes divisiones utilizando la división ordinaria y la regla de Ruffini:

a) $(3x^3 + 2x + 1) : (x + 1)$
b) $(x^6 + x^2 - 3) : (x + 3)$
c) $(x^9 + x^5 + 1) : (x - 2)$

4 Utilizando el valor numérico, halla el resto de:

a) $(x^3 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$
b) $(a^3 - 1) : (a - 1)$
c) $(2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10) : (x + 2)$

5 Utilizando el valor numérico, comprueba si son exactas las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - 16) : (x + 2)$
b) $(x^6 + 64) : (x - 2)$
c) $(x^{99} + 1) : (x - 1)$

6 Utilizando el valor numérico, halla el valor de m en los polinomios siguientes sabiendo que:

a) $5x^4 + mx^3 + 2x - 3$ es divisible por $x + 1$.
b) $3x^2 - mx + 10$ es divisible por $x - 5$.
c) $3x^3 - 7x^2 - 9x - m$ es divisible por $x - 3$.

7 Utilizando el valor numérico, comprueba si son ciertas las afirmaciones:

a) $x^3 - 1$ tiene por factor $x - 1$.
b) $x^3 + 1$ tiene por factor $x + 1$.
c) $x^4 - 17x^2 + 16$ tiene por factor $x - 4$.

8 Utilizando el valor numérico, comprueba si los siguientes polinomios tienen por factores los que se indican, y en caso afirmativo halla otro factor del polinomio:

a) $x^2 - 1$ tiene por factor $x + 1$.
b) $x^3 - 1$ tiene por factor $x - 1$.
c) $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16$ tiene por factor $x + 2$.

9 Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^2 - x - 2$
b) $x^2 - 11x + 30$
c) $42 - x - x^2$
d) $66 + 5x - x^2$
e) $3x^2 + 10x + 3$
f) $2x^2 - x - 1$

PROBLEMAS PARA APLICAR

10 ¿Qué número m se ha de añadir al polinomio $x^3 + 2x^2$ para que sea divisible por $x + 4$?

11 ¿Qué valor ha de tomar k para que $x + 3$ sea un factor de $x^3 - 4x - 12k$?

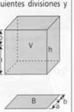
12 El volumen de un cubo, ortoedro o prisma viene dado por la fórmula V = Bh (V = volumen, B = base, h = altura). Si la arista del cubo es a + b, interpreta geométricamente el dividendo, divisor y cociente de las siguientes divisiones y escribe el resultado:

a) $\dfrac{(a + b)^3}{a + b}$

b) $\dfrac{(a + b)^3}{(a + b)^2}$

c) $\dfrac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a + b}$

d) $\dfrac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2}$



13 Utilizando el valor numérico, halla el valor de m para que el polinomio $5x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 4x + m$ tenga por resto 130 al dividirlo por $x + 2$.

14 Divide $x^6 - a^6$ entre $x - a$.

ACTIVIDADES

15 Calcula a y b para que la siguiente división sea exacta:

$$(x^4 - 5x^3 + 4x^2 + ax - b) : (x^2 - 2x + 3)$$

16 Utilizando el valor numérico, halla el valor de m para que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$ tenga por resto 12 al dividirlo por $x + 2$.

17 Observa el triángulo siguiente en el que la suma de los números de cada línea es igual.

Encuentra la expresión general de los triángulos cuyos vértices son 1, 4, 6 y la suma de los números de cada línea es igual a x.

18 Completa el siguiente cuadrado mágico:

16		2	
	10		8
	6	7	
4		16	1

CUESTIONES PARA ACLARARSE

19 ¿Para qué valores de x se anula el polinomio $(x - 1)(x + 2)(x - 6)$? ¿Por qué?

20 ¿Cuáles son las relaciones que existen entre el dividendo, divisor, cociente y resto de una división de polinomios en x? Pon un ejemplo.

21 Si se multiplica el dividendo y el divisor por un número real no nulo, ¿qué sucede con el cociente? ¿Y con el resto? Pon un ejemplo numérico y otro de polinomios.

22 Si divides un polinomio por otro de primer grado, el resto es una constante. ¿Por qué?

23 El polinomio $x^2 + 1$ no se anula para ningún valor real de x. ¿Por qué? ¿Sucede lo mismo con el polinomio $x^4 + 1$?

24 Las raíces de un polinomio son 1, 2, 3, y el coeficiente del término de mayor grado, 1. Escríbelo.

25 ¿Cuál es el número máximo de raíces del polinomio $x^4 - 22x + 1$?

26 ¿Es necesario hacer la división del polinomio $x^9 - 7x + 1$ por $x - 1$ para saber el resto?

27 ¿Qué valores pueden tomar las raíces enteras de un polinomio si el término independiente es 4?

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

28 Determina m para que $x^4 + 3bx^2 - mb^3x + b^4$ sea divisible por $x - b$.

29 Factoriza los siguientes polinomios:

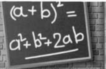
a) $x^3 - x^2 - 4$
b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
c) $x^3 - 3x^2 - 4x - 12$
d) $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$
e) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2$
f) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80$
g) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

30 Determina b en $x^2 + bx + 4$ sabiendo que es divisible por $x + 2$, y que los restos obtenidos al dividirlo por $x + 1$ y $x + 3$ son iguales.

31 Halla un polinomio de tercer grado cuyo coeficiente de x^3 sea la unidad, sabiendo que los restos obtenidos al dividirlo por $x + 1$, $x - 1$ y $x + 2$ son, respectivamente, -2, 0 y -15.

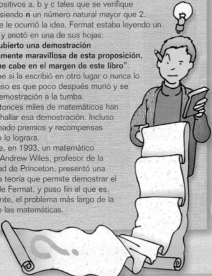
32 Determina a y b para que $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

MURAL DE MATEMÁTICAS



¡Tres siglos para resolver un problema!

Pierre Fermat, un matemático francés del siglo XVII, formuló un sencillo teorema que ha pasado a la historia con su nombre y que ha provocado dolores de cabeza a los amantes de los números durante tres siglos.
Fermat se dio cuenta de que no existen tres números enteros positivos a, b y c tales que se verifique $a^n+b^n=c^n$ siendo **n** un número natural mayor que 2.
Cuando se le ocurrió la idea, Fermat estaba leyendo un viejo libro y anotó en una de sus hojas:
"He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa de esta proposición, pero no me cabe en el margen de este libro".
No se sabe si la escribió en otro lugar o nunca lo hizo. El caso es que poco después murió y se llevó su demostración a la tumba.
Desde entonces miles de matemáticos han intentado hallar esa demostración. Incluso se han creado premios y recompensas para quien lo lograra.
Finalmente, en 1993, un matemático británico, Andrew Wiles, profesor de la Universidad de Princeton, presentó una exhaustiva teoría que permite demostrar el teorema de Fermat, y puso fin al que es, seguramente, el problema más largo de la historia de las matemáticas.



ARTE MÁGICO

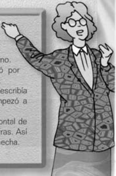
En este grabado, titulado "Melancolía", de Alberto Durero, un pintor alemán que vivió hace quinientos años, aparece un cuadrado mágico de orden 4. Los números se encuentran dispuestos de modo que la suma de los de cada fila, cada columna o cada una de las diagonales es constante.

LA GENEROSIDAD DEL ÁLGEBRA

El matemático francés Jean Baptiste Le Rond d'Alembert, que vivió en el siglo XVII, era un ferviente admirador del álgebra. Decía que "el álgebra es generosa; a menudo da más de lo que se le pide".

Una 'r' mal hecha

El símbolo de raíz es relativamente moderno.
Se empezó a usar en 1525 y apareció por primera vez en un libro alemán de álgebra.
Antes, para indicar la raíz de un número se escribía "raiz de...". Luego, para abreviar, se empezó a poner "r".
Pero si el número era largo el trazo horizontal de la r se alargaba hasta abarcar todas las cifras. Así nació el símbolo $\sqrt{\ }$, como una "r" mal hecha.



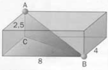
Expresiones fraccionarias y radicales

6

Unos albañiles están construyendo el salón de una vivienda cuyas dimensiones son 8 m de largo, 4 m de ancho y 2,5 m de alto. Se quieren instalar dos altavoces lo más alejados posible. ¿Cuál será la mayor distancia existente entre dos puntos cualesquiera de dicho salón?

Al tratar de ver posibles distancias entre dos puntos cualesquiera es fácil observar que la mayor distancia será la correspondiente a la diagonal del ortoedro, $\overline{AB}$.

Para conocer el valor de $\overline{AB}$ aplicamos dos veces el teorema de Pitágoras del siguiente modo:



$$\overline{CB} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2,5^2 + (\sqrt{80})^2} = \sqrt{86,25} \approx 9,29 \text{ m}$$

Por tanto, la mayor distancia posible en dicho salón es 9,29 m.

¿Cuál será la mayor distancia posible en una habitación cuyas medidas son x m de largo, y m de ancho, z m de alto?

1 Fracciones algebraicas. Valor numérico

Fracciones algebraicas

Las expresiones algebraicas

$$\frac{3x - 4y}{x^2 + 1} \qquad \frac{x^2 + x + y}{x^2 - y^2} \qquad \frac{t}{4x^2}$$

reciben el nombre de fracciones algebraicas.

Una **fracción algebraica entera** es el cociente indicado de dos polinomios enteros, siendo el divisor un polinomio no nulo.

Si el numerador es múltiplo del denominador la fracción se reduce a un polinomio. Por ejemplo:

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

En adelante consideraremos sinónimos: fracción algebraica entera, fracción algebraica y fracción, siempre que no haya confusión.

Valor numérico de una fracción algebraica

El valor numérico de una fracción algebraica es el resultado de sustituir las letras o variables por números. Al dar distintos valores a las letras se obtienen diferentes valores numéricos de la fracción.

Como la división por cero no está definida, una fracción no tiene valor numérico si el denominador es cero. Para hallar los valores de la variable que anulan el denominador, se iguala este a cero y se resuelve la ecuación.

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Dos cuerpos se atraen entre sí con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

(Newton, 1687)

Para calcular el valor numérico de esta expresión se necesita conocer los valores de las masas y la distancia que los separa.

G es la constante de gravitación universal, y vale:

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Hallar el valor numérico de la fracción algebraica $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 3y}{2y - 6x}$

a) Para x = 1 e y = 2 b) Para x = 1 e y = 3

a) $\dfrac{1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 - 6 \cdot 1} = \dfrac{5}{-2}$ b) $\dfrac{1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 6 \cdot 1} = \dfrac{8}{0}$

En el segundo caso la fracción dada no tiene valor numérico, pues el denominador es cero.

2 Hallar los valores de x para los que no está definida la fracción algebraica $\dfrac{5}{x^2 - 9}$

La fracción dada toma valores numéricos para todos los números reales, excepto para $x = 3$ y $x = -3$, que anulan al denominador.

¿SABÍAS QUE...?

En su Invention Nouvelle en Algèbre, *el francés* ***Albert Girard*** *(1595-1632) introduce por primera vez el uso de los* ***paréntesis****, explica el método de descomposición de un polinomio en factores, enuncia el teorema fundamental del álgebra, y usa además el signo ——— colocado entre el numerador y el denominador para indicar una fracción algebraica o numérica.*

2 Simplificación de fracciones algebraicas

RECUERDA

Fracciones numéricas equivalentes:

$$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

Se verifica que los productos cruzados son iguales:

$$6 \cdot 7 = 3 \cdot 14$$

Las fracciones

$$\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} \quad \text{y} \quad \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$$

son **fracciones algebraicas equivalentes** ya que tienen el mismo valor numérico cualquiera que sea el valor que asignemos a las letras.

Igual que ocurre con las fracciones numéricas equivalentes, en las fracciones algebraicas equivalentes se verifica que los productos cruzados son iguales.

RECUERDA

Simplificación de fracciones numéricas:

$$\frac{24}{120} = \frac{12 \cdot 2}{60 \cdot 2} = \frac{12}{60} = \frac{6 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{6}{30} = \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Simplificar una fracción algebraica es dividir el numerador y el denominador por el mismo factor no nulo para obtener una fracción equivalente más sencilla.

Cuando la fracción no puede simplificarse más, se llama **irreducible**.

Para simplificar se descompone en factores el numerador y el denominador y a continuación se suprimen los factores comunes.

Reducción de fracciones a común denominador

Reducir dos o más fracciones algebraicas a común denominador es hallar otras fracciones, equivalentes a las primeras, que tengan todas ellas el mismo denominador.

RECUERDA

Reducción a común denominador de fracciones numéricas:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{28}{12}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Simplificar las siguientes expresiones algebraicas:**

a) $$\frac{x^2 + 2ax + a^2}{mx + ma} = \frac{(x + a)^2}{m\,(x + a)} = \frac{x + a}{m}$$

b) $$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)\,(x^2 + x + 1)}{(x + 1)\,(x - 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

4 **Reducir a común denominador las siguientes fracciones:**

$$\frac{3}{x - 1} \qquad \frac{x}{x + 1} \qquad \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

Como $x^2 - 1 = (x + 1)\,(x - 1)$, el denominador común es $x^2 - 1$. Las fracciones equivalen respectivamente a:

$$\frac{3\,(x + 1)}{x^2 - 1} \qquad \frac{x(x - 1)}{x^2 - 1} \qquad \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

3 Operaciones con fracciones algebraicas: suma y diferencia

La adición y sustracción de fracciones algebraicas se definen de forma análoga a como se hace con los números racionales. Para poder sumar o restar fracciones algebraicas deben tener el mismo denominador.

La **suma** o **diferencia** de dos fracciones que tienen **igual denominador** es otra fracción que tiene por numerador la suma o diferencia de los numeradores y por denominador el denominador común:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A + C}{B} \qquad \frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A - C}{B}$$

suma — diferencia

Si las fracciones no tienen el mismo denominador, para poder sumarlas o restarlas hay que reducirlas previamente a común denominador, y luego se procede como acabamos de ver.

La suma o diferencia de fracciones algebraicas no varía si se sustituye una fracción por otra equivalente; por tanto, siempre que sea posible conviene simplificarlas antes de operar.

Dos fracciones algebraicas son **opuestas** si su suma es cero; por ejemplo, las fracciones

$$\frac{x^2 - 1}{x} \quad y \quad \frac{-x^2 + 1}{x}$$

son opuestas, ya que

$$\frac{x^2 - 1}{x} + \frac{-x^2 + 1}{x} = \frac{0}{x} = 0$$

RECUERDA

Suma y diferencia de fracciones numéricas.

a) Con el mismo denominador:

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1 + 3 - 2}{7} = \frac{2}{7}$$

b) Con distinto denominador:

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6}{12} + \frac{28}{12} - \frac{9}{12} = \frac{6 + 28 - 9}{12} = \frac{25}{12}$$

Las fracciones

$$\frac{3}{4} \quad y \quad -\frac{3}{4}$$

son opuestas, ya que:

$$\frac{3}{4} + \frac{-3}{4} = 0$$

FUNDAMENTAL

Con fracciones algebraicas se opera de la misma forma que con fracciones numéricas.

EJERCICIOS RESUELTOS

5 **Realizar las siguientes operaciones:**

a) $$\frac{x + 2y}{x^2 - y^2} + \frac{2x - 5y}{x^2 - y^2} = \frac{(x + 2y) + (2x - 5y)}{x^2 - y^2} = \frac{3x - 3y}{x^2 - y^2} = \frac{3(x - y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{3}{x + y}$$

b) $$\frac{1}{x + 1} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{x - 1}{(x + 1)(x - 1)} + \frac{2x}{(x + 1)(x - 1)} - \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} =$$
$$= \frac{x - 1 + 2x - (x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2x - 2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{2}{x + 1}$$

c) $$\frac{1}{x} + \frac{2}{x + 1} - 5 = \frac{x + 1}{x(x + 1)} + \frac{2x}{x(x + 1)} - \frac{5x(x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{x + 1 + 2x - 5x^2 - 5x}{x^2 + x} = \frac{-5x^2 - 2x + 1}{x^2 + x}$$

4 Operaciones con fracciones algebraicas: producto y cociente

RECUERDA

Producto de fracciones numéricas:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{28}$$

Cociente de fracciones numéricas:

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$$

Las fracciones

$$\frac{3}{7} \quad y \quad \frac{7}{3}$$

son inversas, ya que:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{21}{21} = 1$$

La multiplicación y división de fracciones algebraicas se definen también de forma análoga a como se hace con los números racionales.

El **producto de dos fracciones** es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Se llama **fracción algebraica inversa** de una fracción dada a la que se obtiene al intercambiar el numerador y el denominador.

El **cociente de dos fracciones** es otra fracción que se obtiene multiplicando el dividendo por la inversa del divisor:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

El producto o cociente de fracciones algebraicas no varía si se sustituye una fracción por otra equivalente; por tanto, siempre conviene simplificar antes de operar.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 Realizar los siguientes productos:

a) $\dfrac{x+1}{x^2-2} \cdot \dfrac{x-1}{x^2+2} = \dfrac{(x+1)\,(x-1)}{(x^2-2)\,(x^2+2)} = \dfrac{x^2-1}{x^4-4}$

b) $\dfrac{2x+3}{x-1} \cdot \dfrac{5x^2}{x+1} = \dfrac{(2x+3)\,5x^2}{(x-1)\,(x+1)} = \dfrac{10x^3+15x^2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{4ax}{2(x+a)} \cdot \dfrac{x}{3(a+1)} = \dfrac{4ax \cdot x}{2(x+a)\,3(a+1)} = \dfrac{4ax^2}{6ax+6x+6a^2+6a} =$

$= \dfrac{2ax^2}{3ax+3x+3a^2+3a}$

7 Efectúa las divisiones:

a) $\dfrac{x+1}{x^2-2} : \dfrac{x-1}{x^2+2} = \dfrac{(x+1)\,(x^2+2)}{(x^2-2)\,(x-1)}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-1} : \dfrac{x\,(x+1)}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{x-1} : \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1}{x\,(x-1)} = \dfrac{x+1}{x^2-x}$

5 Expresiones radicales

Expresiones radicales

Las siguientes expresiones:

$$\sqrt{x^2\,y^4} \qquad \sqrt[3]{a^3\,b^6} \qquad \sqrt[4]{2m^2 - n^2}$$

se llaman **expresiones radicales**.

> Una **expresión radical** es un polinomio bajo el signo de raíz, cualquiera que sea el índice.

El valor numérico de una expresión radical es el resultado de sustituir las letras o variables por números. Al dar distintos valores a las letras se obtienen diferentes valores numéricos de la expresión radical.

Al estudiar los radicales se vio que, cuando el índice es par, no se pueden hallar las raíces de radicando negativo. Por esta misma razón, al calcular el valor numérico de una expresión radical es importante tener en cuenta lo siguiente:

- Índice par → radicando positivo: dos raíces. → radicando negativo: ninguna raíz.
- Índice impar → tanto si el radicando es positivo como negativo, existe una única raíz.

Una observación:

Puesto que un radical de **índice par** y **radicando positivo** tiene dos raíces, conviene distinguir una de otra. En adelante:

- La **raíz positiva** se designará siempre sin signo:

$$\sqrt[n]{a}, \quad \text{es decir,} \quad \sqrt[n]{a} = +\sqrt[n]{a}$$

- La **raíz negativa** se designará siempre por $-\sqrt[n]{a}$

Expresiones radicales equivalentes

Un radical puede escribirse de muchas formas. Por ejemplo:

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4} = \ldots$$

> Dos radicales son **equivalentes** si tienen el mismo valor numérico para cualquier valor que asignemos a sus variables.

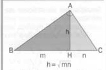
La siguiente regla permite pasar de un radical a otro equivalente.

Si se multiplican o dividen el índice y el exponente de un radical por un mismo número se obtiene otro radical **equivalente** al dado siempre que se elijan las raíces con el mismo signo que la dada.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}}$$

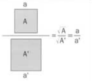
Esta propiedad permite **simplificar** radicales y hacer que varios radicales tengan el **mismo índice**.

RADICALES EN GEOMETRÍA

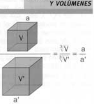


¿Podrías demostrarlo utilizando la semejanza de los triángulos rojo y amarillo?

RAZÓN DE SEMEJANZA Y ÁREAS



RAZÓN DE SEMEJANZA Y VOLÚMENES



6 Simplificación y reducción de radicales

❖ Simplificación de radicales

La relación $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ que permite obtener radicales equivalentes es igual a la que se aplica a los radicales numéricos. Por esto se pueden simplificar radicales algebraicos y reducirlos a índice común por los mismos procedimientos que se utilizan con los numéricos.

> Para simplificar un radical se divide el índice y el exponente por el mismo número:
>
> $$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[6]{x^3} = \sqrt[\frac{6}{3}]{x^{\frac{3}{3}}} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt[12]{y^4} = \sqrt[\frac{12}{4}]{y^{\frac{4}{4}}} = \sqrt[3]{y}$$

$$\sqrt[18]{z^{12}} = \sqrt[\frac{18}{6}]{z^{\frac{12}{6}}} = \sqrt[3]{z^2}$$

RECUERDA

Simplificación de radicales numéricos:

$$\sqrt[4]{5^6} = \sqrt[\frac{4}{2}]{5^{\frac{6}{2}}} = \sqrt{5^3}$$

RECUERDA

Reducción de radicales numéricos a común índice:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt[3]{5^2} \qquad \sqrt[6]{7}$$

El índice común es 6.

$$\sqrt[6]{3^3} \qquad \sqrt[6]{5^4} \qquad \sqrt[6]{7}$$

❖ Reducción de radicales a índice común

Reducir dos o más radicales a índice común es hallar otros radicales, equivalentes a los primeros, que tengan todos ellos el mismo índice.

El índice común de estos radicales puede ser un **múltiplo cualquiera** de los índices. En particular:

- El producto de todos ellos.
- El mínimo común múltiplo (**m.c.m.**) de los índices.

Aunque conviene utilizar el m.c.m. para operar con números más sencillos, como se hace con las fracciones, no es necesario.

EJERCICIOS RESUELTOS

8 **Simplificar los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[4]{x^2}$ b) $\sqrt[8]{x^4}$ c) $\sqrt[12]{x^3}$ d) $\sqrt[5]{x^5\,y^{10}}$

a) $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$

b) $\sqrt[8]{x^4} = \sqrt{x}$

c) $\sqrt[12]{x^3} = \sqrt[4]{x}$

d) $\sqrt[5]{x^5\,y^{10}} = x\,y^2$

9 **Reducir a índice común los siguientes radicales:**

a) $\sqrt{x} \qquad \sqrt[4]{x^3} \qquad \sqrt[6]{x^5}$

$\sqrt[12]{x^6} \qquad \sqrt[12]{x^9} \qquad \sqrt[12]{x^{10}}$

Se toma 12 como índice común, por ser m.c.m. (2, 4, 6) = 12
También puede tomarse: 24, 36, 48...

b) $\sqrt{x} \qquad \sqrt[5]{x^3} \qquad \sqrt[15]{x^2}$

$\sqrt[30]{x^{15}} \qquad \sqrt[30]{x^{18}} \qquad \sqrt[30]{x^4}$

m.c.m. (2, 5, 15) = 30
También puede tomarse: 60, 90, 120...

¿SABÍAS QUE...?

Los signos que ahora usamos para indicar suma (+), resta (−), raíz ($\sqrt{\ }$), etc., son relativamente modernos. En el siglo XVII aún se usaban las letras p de plus para la suma y m de minus para la resta. La raíz cuadrada se expresaba por R.q. y la cúbica como R.c.

Mira, por ejemplo, cómo escribían en esa época lo que para nosotros es:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4\,352} + 16}$$

R.c. ⌊R.q. 4 352 p. 16⌋

7 Operaciones con expresiones radicales

Las siguientes reglas indican cómo se opera con radicales del mismo índice. Se utilizan muy a menudo en los dos sentidos. Las reglas son las mismas que para radicales numéricos. Las demostraciones son inmediatas elevando los dos miembros al cuadrado o a la potencia enésima.

RECUERDA

Las operaciones con expresiones radicales se hacen de forma análoga a las operaciones con radicales numéricos.

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{5\cdot 3}$$
$$\sqrt{5}:\sqrt{3} = \sqrt{5:3}$$
$$(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5^3}$$
$$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$$

❖ Radicales del mismo índice

1. El producto de dos radicales del mismo índice es otro radical que tiene por índice el común y por radicando el producto de los radicandos:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores.

2. El cociente de dos radicales del mismo índice es otro radical que tiene por índice el común y por radicando el cociente de los radicandos:

$\sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{a:b}$	$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$

La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces del dividendo y del divisor.

3. La potencia de una raíz es otra raíz que tiene por índice el mismo y por radicando la potencia del radicando:

$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

4. La raíz de una raíz es otra raíz que tiene por índice el producto de los índices y por radicando el mismo:

$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

¿DÓNDE ESTÁ EL TRUCO?

$$\sqrt{-x^2} = \sqrt[4]{(-x^2)^2} = \sqrt[4]{x^4} = x$$

❖ Radicales de distinto índice

Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice se transforman primero en radicales equivalentes de igual índice y luego se utilizan las reglas anteriores.

EJERCICIOS RESUELTOS

10 **Realizar las siguientes operaciones con radicales:**

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{xy^2} = \sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^2y^4} = \sqrt[6]{x^5y^4}$

b) $\sqrt{xy}:\sqrt[5]{xy} = \sqrt[10]{x^5y^5}:\sqrt[10]{x^2y^2} = \sqrt[10]{x^3y^3}$

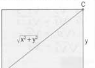
8 Cálculo con expresiones radicales

NO CONFUNDIR

Con radicales numéricos:

$$\sqrt{9+4} \neq \sqrt{9} + \sqrt{4}$$

Con radicales algebraicos:

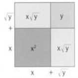


El camino $\overline{AC}$ es distinto de la suma de los caminos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

$$\sqrt{x^2+y^2} \neq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$$

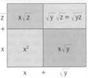
AYUDANDO A OPERAR

Un cuadrado:



$$(x + \sqrt{y})^2 = x^2 + 2x\sqrt{y} + y$$

Un rectángulo:



$$(x + \sqrt{z})\,(x + \sqrt{y}) = x^2 + x\sqrt{z} + x\sqrt{y} + \sqrt{yz}$$

Suma y diferencia

Los resultados de las operaciones radicales pueden reducirse utilizando las reglas anteriores.

En relación con esta cuestión conviene saber también **lo que no se puede hacer**, ya que los errores son muy frecuentes.

- No se puede reducir $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, es decir: $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$
- No se puede reducir $x + \sqrt{y}$, es decir: $x + \sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$
- No se puede hallar la raíz de una suma o diferencia:

$$\sqrt{x^2+y^2} \neq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = x + y$$
$$\sqrt{x^2-y^2} \neq \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x - y$$

Es correcta en cambio la siguiente suma:

$$\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$$

- Para reducir radicales por suma o diferencia tienen que ser semejantes; es decir, tener el mismo índice y el mismo radicando.

Para sumar $\sqrt{x} + \sqrt{y^2x}$ hay que transformarlos previamente en radicales homogéneos, como se indica a continuación:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y^2x} = \sqrt{x} + \sqrt{y^2 \cdot x} = \sqrt{x} + y\sqrt{x} = (1+y)\sqrt{x}$$

Racionalización

Las expresiones algebraicas $x - 3\sqrt{y}$ y $x + 3\sqrt{y}$ se dice que son **conjugadas**.

Pasar de una fracción a otra equivalente que no tenga en el denominador radicales se llama **racionalizar**.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})\,(1+\sqrt{x})} = \frac{1+\sqrt{x}}{1-x}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

11 **Realizar las siguientes operaciones:**

a) $(x + 3\sqrt{y}) + (x - 8\sqrt{y}) = x + x + 3\sqrt{y} - 8\sqrt{y} = 2x - 5\sqrt{y}$

b) $\sqrt{x^2y^3} - 3\sqrt{x^4y} = xy\sqrt{y} - 3x^2\sqrt{y} = (xy - 3x^2)\sqrt{y}$

12 **Racionalizar:**

$$\frac{x+8\sqrt{y}}{x-3\sqrt{y}} = \frac{(x+8\sqrt{y})\,(x+3\sqrt{y})}{(x-3\sqrt{y})\,(x+3\sqrt{y})} =$$
$$= \frac{x^2 + 3x\sqrt{y} + 8x\sqrt{y} + 24\sqrt{y}\,\sqrt{y}}{x^2 - 9\sqrt{y}\,\sqrt{y}} = \frac{x^2 + 11x\sqrt{y} + 24y}{x^2 - 9y}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Leer y comprender el enunciado.
- Hacer un dibujo adecuado.
- Razonar hacia atrás.
- Comprobar e interpretar la solución.

PROBLEMA

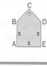
Un terreno de forma pentagonal tiene tres ángulos rectos y los otros dos ángulos son iguales. Además se sabe que tres lados son iguales y miden x metros y los otros dos también son iguales entre sí. Expresar en función de x la mayor distancia entre dos vértices del pentágono.

LEER Y COMPRENDER EL ENUNCIADO

- Si el pentágono tiene tres ángulos rectos y los otros dos son iguales, una posibilidad es que se trate de un pentágono de los llamados «casita». Además, como los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{D}$ son iguales entonces los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son iguales y, en consecuencia, el triángulo $\widehat{BCD}$ es isósceles y recto en C.

HACER UN DIBUJO ADECUADO

- De todo lo anterior se deduce que el dibujo debe ser de la forma:



RAZONAR HACIA ATRÁS

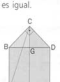
- A la vista de la figura parece evidente que la mayor distancia entre dos vértices del pentágono será la diagonal $\overline{AC}$ o $\overline{CE}$, que es igual.

Se construye el segmento $\overline{BD}$ y el segmento $\overline{CF}$.

Para hallar $\overline{AC}$ es necesario conocer antes $\overline{CF}$.

Para hallar $\overline{CF}$ se debe calcular $\overline{CG}$.

Pero el triángulo $\widehat{BCG}$ es isósceles, por tener dos ángulos iguales (de 45°), por lo que $\overline{CG} = \overline{BG}$.



Por tanto: $\overline{CG} = \dfrac{x}{2}$

Entonces el segmento: $\overline{CF} = x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3x}{2}$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\widehat{ACF}$ se tiene que:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CF}^2 + \overline{AF}^2} = \sqrt{\left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{10x^2}{4}} = $$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{10} = x\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ m}$$

COMPROBAR E INTERPRETAR EL RESULTADO

- ¿Será la distancia $\overline{AC}$ la mayor entre dos vértices del pentágono?

En efecto, pues la distancia $\overline{AD} = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$ m, y se verifica que $\overline{AD} < \overline{AC}$ y las otras son menores.

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{15a^4b^4c^2}{18ab^2c^3}$ c) $\dfrac{20x^4y^2}{30x^2y}$

b) $\dfrac{10ab^2x^4}{15ab^2c}$ d) $\dfrac{ab - a^2}{ax - a^2}$

2 Simplifica las siguientes fracciones factorizando previamente:

a) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ c) $\dfrac{xy - 2x - 3y + 6}{xy - 2x}$

b) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$ d) $\dfrac{x^2 + 2ax + a^2}{mx + ma}$

3 Reduce las siguientes fracciones a mínimo común denominador:

a) $\dfrac{a}{bc}, \dfrac{b}{ac}, \dfrac{c}{bc}$ c) $\dfrac{a + b}{a - b}, \dfrac{a - b}{(a - b)^2}, \dfrac{a}{a^2 - b^2}$

b) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1}, \dfrac{x^2}{x + 1}$ d) $\dfrac{1}{x + 2}, \dfrac{1}{x - 2}, \dfrac{4}{x^2 - 4^2}$

4 En las siguientes sumas y restas, opera y simplifica:

a) $\dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2}$ c) $\dfrac{a - b}{c - d} - \dfrac{b - a}{d - c}$

b) $\dfrac{x}{x^2 - y^2} + \dfrac{y}{y^2 - x^2}$ d) $\dfrac{a}{b(a - b)} - \dfrac{b}{a(a - b)}$

5 En las siguientes sumas y restas, reduce primero a mínimo común denominador, opera y simplifica:

a) $\dfrac{2x}{x - 1} + \dfrac{3x + 1}{x - 1} - \dfrac{1 - x}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{4}{1 + x} + \dfrac{x}{1 + x^2} + \dfrac{x + 1}{x - 1}$

c) $\dfrac{3}{2x - 4} + \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{x + 10}{2x^2 - 8}$

6 Opera y simplifica:

a) $\left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)(x^4 + x^3)$

b) $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x} + \dfrac{1 - x}{1 + x}\right)\left(\dfrac{3}{4x} - \dfrac{x}{4} - x\right)$

c) $\left(x + \dfrac{x}{x - 1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x - 1}\right)$

d) $\left(\dfrac{x - y}{x + y} + \dfrac{x + y}{x - y}\right)\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2xy} + 1\right) \cdot \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

7 Calcula mentalmente las dos raíces cuadradas de:

a) x^2, x^4, x^8, x^{100}

b) $\dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x^6}, \dfrac{x^4}{y^2}, \dfrac{x^6}{z^{10}}$

c) $4x^2y^2, x^4y^4, x^2y^2z^2, x^4y^4z^4$

d) $x^{-6}, x^{-24}, x^{-10}, x^{-10}x^2$

8 Halla el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x^2y}{2x + y} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} \qquad \frac{3x}{x^2 + 3y}$$

a) Para $x = 1$; $y = 3$

b) Para $x = -1$; $y = 1$

9 Halla el valor numérico de las siguientes expresiones radicales:

$$\sqrt{x^2y + 3} \quad \sqrt{2xy - x + 1} \qquad \sqrt{\frac{xy}{x + y}}$$

a) Para $x = 1$; $y = 2$

b) Para $x = 2$; $y = 3$

10 Calcula los cuadrados de las siguientes expresiones:

a) $2\sqrt{x}$ $3\sqrt{xy}$ $3\sqrt{xyz}$

b) $1 + \sqrt{x}$ $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

11 Di si los siguientes radicales son equivalentes (los radicales de índice par se consideran positivos si no van precedidos del signo).

$$\sqrt{x} \qquad \sqrt[4]{x^2} \qquad \sqrt[6]{x^3}$$

ACTIVIDADES

12 Halla los radicales irreducibles equivalentes a:

a) $\sqrt[4]{9x^2}$ c) $\sqrt[9]{x^3}$
b) $\sqrt[8]{x^4}$ d) $\sqrt[32]{2x^5}$

13 Reduce los siguientes radicales a índice común:

a) $\sqrt{x}$ $\sqrt[5]{x^3}$ $\sqrt[15]{x^2}$
b) $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[5]{x^3}$ $\sqrt[15]{x^2}$
c) $\sqrt[4]{xy}$ $\sqrt[6]{xy^3}$ $\sqrt[15]{xy^2}$

14 Multiplica los siguientes radicales:

a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$
b) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy}$
c) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$
d) $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

15 Extrae los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{x^3}$ $\sqrt{x^5}$ $\sqrt{x^7}$ $\sqrt{x^9}$
b) $\sqrt{xy^3}$ $\sqrt{x^2y^5}$ $\sqrt{x^7y^2}$ $\sqrt{x^2zy^9}$
c) $\sqrt[3]{x^3}$ $\sqrt[3]{x^5}$ $\sqrt[3]{x^7}$ $\sqrt[3]{x^9}$

16 Introduce el factor entero en el signo radical:

a) $x\sqrt{y}$ $x^2z\sqrt{y}$ $x^3\sqrt{y}$ $x^4\sqrt{y}$
b) $3z\sqrt{x}$ $xy\sqrt{3}$ $3^3\sqrt[3]{x}$ $x^3\sqrt[4]{3}$

17 Calcula y simplifica:

a) $(x + \sqrt{x})\,(2 - \sqrt{x})$
b) $(x + \sqrt{x})\,(x - \sqrt{x})$
c) $(x - \sqrt{x + 1})\,(x - \sqrt{x + 1})$

18 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}}$ $\dfrac{\sqrt{x^2y}}{\sqrt{x}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{y}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{y}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{x}}$

19 Suma los siguientes radicales reduciéndolos previamente a radicales semejantes:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{xy^2} + \sqrt{xy^4} - \sqrt{xy^6}$
b) $\sqrt{5x} + \sqrt{45x} + \sqrt{180x} - \sqrt{80x}$
c) $\sqrt{24xy^2} - 5\sqrt{6x^3} + \sqrt{486x^5y^4}$

20 Multiplica por su conjugada cada una de las expresiones siguientes:

a) $2 - \sqrt{x}$ $\sqrt{x} - 2$ $\sqrt{x} + \sqrt{y}$
b) $-2 + \sqrt{x}$ $-\sqrt{x} - 2$ $-\sqrt{x} - \sqrt{y}$

21 Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \dfrac{2}{5\sqrt{x}}, \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \dfrac{2 - \sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \dfrac{9}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

PROBLEMAS PARA APLICAR

22 Las relaciones entre las escalas termométricas de Celsius, Fahrenheit y Kelvin vienen dadas por las siguientes fracciones:

$$\frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180} = \frac{K - 273}{100}$$

a) Pasa 25° Celsius a las restantes escalas.
b) Pasa 77° Fahrenheit a las restantes escalas.
c) Pasa 248° Kelvin a las restantes escalas.

23 Los lados de un triángulo miden 15 cm, 20 cm y 25 cm. Otro triángulo semejante tiene por homólogo del más pequeño un lado que mide 9 cm. Halla los restantes lados.

24 Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Otro triángulo semejante tiene por perímetro 72 cm. Halla sus lados.

25 Expresa la altura h de un triángulo equilátero en función del lado si este mide a cm. Utiliza el teorema de Pitágoras.

26 Expresa el área S de un triángulo equilátero en función del lado si este mide a cm.

ACTIVIDADES

CUESTIONES PARA ACLARARSE

27 Las fracciones siguientes son equivalentes. ¿Verdadero o falso?

a) $\dfrac{2+x}{2+y}, \dfrac{x}{y}, \dfrac{y+2x}{x+2y}$

b) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+yx}, \dfrac{x^2+y^2}{x^2+yx}, \dfrac{x+y}{x}$

28 La potencia de fracciones se define de la misma forma que la de una expresión entera. ¿A qué es igual toda fracción algebraica elevada a 0? ¿Y elevada a 1? ¿Y elevada a -1?

29 Dos cuestiones similares para aclarar con ejemplos:

a) La raíz cuadrada de la raíz cúbica de una expresión algebraica, ¿a qué equivale?

b) ¿Se puede extraer siempre la raíz cuadrada de la raíz cúbica de una expresión algebraica? ¿Por qué?

30 Si dividimos el exponente de una potencia por 2, ¿qué operación hemos realizado? ¿Y si lo dividimos por 3? Razona la respuesta.

31 Verdadero o falso. ¿Por qué?

a) $\sqrt{a^2+b^2+2ab} = a+b+\sqrt{2ab}$

b) $\sqrt{a^2+b^2+2ab} = a+b$

c) $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = x+y$

d) $\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{x^2}-\sqrt{y^2} = x-y$

32 Si multiplicas o divides el radicando por x, ¿queda multiplicada o dividida por x la raíz cuadrada? ¿Por qué?

33 ¿Por cuánto tienes que multiplicar o dividir una expresión algebraica para que su raíz cuadrada quede multiplicada o dividida por x? Aclara tus respuestas con ejemplos.

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

34 Reduce a mínimo común denominador las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{1}{a^3-b^3} \quad \dfrac{1}{a-b} \quad \dfrac{a}{a^2+ab+b^2}$

b) $\dfrac{1}{x+1} \quad \dfrac{x-4}{x^2-x+1} \quad \dfrac{x^2-3x+2}{x^3+1}$

35 Simplifica las siguientes fracciones factorizando previamente:

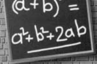
a) $\dfrac{a^3+a^2+a-3}{a^3+3a^2+5a+3}$ c) $\dfrac{x^3+4x^2-5x}{x^3-6x+5}$

b) $\dfrac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2-2bc-c^2}$ d) $\dfrac{(a+b)^2-(c+d)^2}{(a+c)^2-(b+d)^2}$

36 Un caracol está en la parte inferior de un bidón de 1 m de altura y 0,6 m de diámetro. Se dirige a un punto de la parte superior opuesto al que estaba abajo. ¿Qué espacio recorre si el camino utilizado ha sido mínimo?

37 Un aula mide 6 m de ancho, 7 m de largo y 4 m de alto. Hay dos moscas dentro de la clase. ¿Podrías calcular la distancia máxima a la que pueden estar?

MURAL DE MATEMÁTICAS



Fracciones deportivas

Las retransmisiones deportivas que nos ofrecen las cadenas de televisión son cada vez más completas. No solo porque nos muestran imágenes tomadas desde más ángulos, sino porque añaden datos que nos ayudan a entender el desarrollo del juego. Muchos de ellos se expresan en forma de fracciones o de porcentajes como estos:

Celta, 52%
Tenerife, 48%

No cabe duda de que los partidos de fútbol los gana el equipo que mete más goles, pero hay otros datos que tienen su importancia. Uno de ellos es el tiempo de posesión del balón.

Fíjate cómo, en la mayor parte de las retransmisiones futbolísticas, la televisión ofrece cada cierto tiempo unos porcentajes que muestran cuánto tiempo ha tenido el balón cada equipo. Esos datos, que se ofrecen normalmente en porcentajes, no aclaran quién va ganando el partido, pero sí qué equipo lo domina y "marca el ritmo" del juego.

O'NEILL
1P 1/2. 2P 4/7. 3P 3/4

Datos como estos aparecen bajo la imagen de un jugador de baloncesto durante el partido. ¿Sabes qué quieren decir? Pues es muy sencillo: ha encestado uno de los dos lanzamientos de un punto que ha intentado hasta ahora (1p. 1/2), cuatro de los siete tiros de dos puntos (2p. 4/7) y tres de los cuatro triples que ha lanzado (3p. 3/4).

En este caso los datos suelen ofrecerse así, como fracciones, pero no es difícil hallarlos como porcentajes. ¿Sabrías hacerlo?

Viète
JUGAR CON LOS NÚMEROS

François Viète (1540-1603) está considerado como el matemático más importante del siglo XVI. En realidad se ganaba la vida como magistrado y para él las matemáticas eran una afición, una diversión a la que hizo aportaciones importantísimas.

Muchos consideran a Viète el padre del álgebra moderna porque fue el primero en emplear letras para simbolizar las incógnitas y constantes en las ecuaciones algebraicas. También contribuyó enormemente al desarrollo de la trigonometría. Pero lo que en realidad le hizo famoso fue su habilidad para descifrar los mensajes secretos que el rey Felipe II de España enviaba a sus tropas en Flandes. El rey español, al darse cuenta de que los franceses descubrían sus mensajes en clave, se quedó convencido de que aquello tenía que ser cosa de brujas.

¡80 GRADOS EN SEVILLA!

El mapa del tiempo que aparece en un periódico de Estados Unidos asegura que en Sevilla hará hoy una temperatura de... ¡80 grados! Sevilla tiene fama de ciudad calurosa pero... ¡eso es demasiado!

En Estados Unidos y en otros países la temperatura no se mide en la "escala Celsius" –los grados centígrados (C) que usamos nosotros en España–, sino en grados Fahrenheit (F). Existe aún otra escala, la llamada Kelvin o absoluta (K), que se emplea en ciencias.

Para transformar temperaturas expresadas en una de las escalas puedes usar estas fracciones equivalentes:

$$\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180} = \frac{K-273}{100}$$

Así comprobarás que ese día en Sevilla hacía 26,6 grados centígrados... Un agradable día de primavera.

Ecuaciones de primer grado

7

En la fiesta de fin de curso de una clase, Lucía ha observado que hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Sabiendo que en total hay 156 personas, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay en la fiesta?

Para la resolución de este tipo de problemas lo más importante es elegir convenientemente las incógnitas, las menos posibles, que permitan traducir el texto del problema mediante relaciones algebraicas.

De esta forma se llega a plantear una ecuación, en este caso de primer grado, y las soluciones de la ecuación son las soluciones del problema.

En esta unidad vamos a estudiar las ecuaciones de primer grado que ya se conocían en la civilización babilónica hacia 1500 años antes de Cristo, pero que se resolvían sin utilizar, de manera sistemática, notaciones algebraicas o simbólicas como hacemos actualmente.

1 Identidades y ecuaciones

En el conjunto de igualdades distinguimos tres tipos:

- **Identidad numérica** es una igualdad cierta entre números:

  Ejemplo: $3 + 4 + 2 = 7 + 2$

- **Identidad literal** es una igualdad que se verifica o es cierta para cualquier valor que demos a las letras.

  Ejemplo: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

- **Ecuación** es una igualdad algebraica que se verifica o es cierta para algunos valores determinados de las letras que llamamos incógnitas.

  Ejemplos:

  $x^2 - 1 = 0$ es una ecuación, ya que solo se verifica para $x = 1$ y $x = -1$.

  $x + y = 10$ es una ecuación que se verifica para infinitas parejas de números: $x = 2, y = 8; x = 4, y = 6; ...$

Soluciones o raíces de una ecuación

Las **soluciones** o **raíces** de una ecuación son los valores que sustituidos en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Cada solución de una ecuación está formada por tantos números como letras tenga.

Resolver una ecuación es hallar las soluciones de la misma.

Comprobar una ecuación consiste en sustituir las letras por los valores obtenidos y ver si la igualdad resultante es cierta. Este paso conviene hacerlo siempre para ver si la solución es correcta.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Dadas las ecuaciones siguientes, comprobar que:**

a) $3x = 12$ tiene la solución $x = 4$.

b) $2x^2 = 8$ tiene dos soluciones: $x = 2$ y $x = -2$

c) $2x - x = 12 + x$ no tiene solución.

a) En efecto, al sustituir x por 4 se verifica: $3 \cdot 4 = 12$
No existe ningún otro valor que haga posible la igualdad.

b) Si sustituimos x por 2 y por -2 se verifica:
$2(2)^2 = 8$ y $2(-2)^2 = 8$
Ningún otro valor hace posible la igualdad.

c) Si reducimos términos se tiene: $x = 12 + x$
No existe ningún valor que sea igual a ese valor más doce unidades; por tanto, esta ecuación no tiene solución.

¿SABÍAS QUE...?

En la primera mitad del siglo III Diofanto de Alejandría usa los símbolos algebraicos y enuncia las reglas para resolver ecuaciones de primero y segundo grado.

2 Expresión de relaciones con símbolos

¿SABÍAS QUE...?

En cierta ocasión preguntaron a Pitágoras cuál era el número de sus alumnos y respondió:

«La mitad estudia aritmética, la cuarta parte oratoria; la séptima parte medita en silencio y quedan tres alumnos más.»

Si te dicen que halles dos números consecutivos cuya suma es 151, ¿cómo plantearías la ecuación?

Supongamos que un número es x; el otro, como es consecutivo, será $x + 1$; por tanto, la ecuación será: $x + x + 1 = 151$.

Como ves, hemos realizado en primer lugar la elección de la incógnita y posteriormente hemos expresado mediante símbolos la relación dada en el lenguaje ordinario; a eso se llama **plantear** la ecuación.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Plantear las siguientes ecuaciones:**

a) **Tres números consecutivos suman 30:** $x + x + 1 + x + 2 = 30$

b) **La suma de un número y su doble es igual a 60:** $x + 2x = 60$

c) **Un número más su quinta parte es 12:** $x + \frac{x}{5} = 12$

d) **El producto de un número por su tercera parte es 27:** $x \cdot \frac{x}{3} = 27$

e) **Dos números proporcionales a 3 y a 4 suman 35:** $3x + 4x = 35$

f) **La diferencia de dos números es 10:** $x - y = 10$

3 **La suma de las edades de un padre y un hijo es igual a 40 años. La edad del padre es 7 veces la edad del hijo. Plantear la ecuación.**

Se eligen las incógnitas: Sea x la edad del hijo, entonces la edad del padre es $40 - x$, pues la suma ha de ser 40.

Se plantea la ecuación: Como la edad del padre es 7 veces la edad del hijo, se tiene que:

edad del padre = 7 veces la edad del hijo

$$40 - x = 7x$$

4 **Juan salió de casa con una cierta cantidad de dinero. Gastó la tercera parte del dinero que tenía y perdió las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al volver a casa todavía le quedaban 12 euros. ¿Cómo se plantearía la ecuación para hallar el dinero que tenía Juan?**

Se eligen las incógnitas: Supongamos que Juan tenía x euros:

Gastó la tercera parte, $\frac{1}{3}x$, y le quedaron $\frac{2}{3}x$.

Perdió los $\frac{2}{3}$ de lo que le quedaba, $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x\right)$, y todavía tenía 12 euros.

Se plantea la ecuación:

lo que gastó + lo que perdió + lo que le quedaba = lo que tenía

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x\right) + 12 = x$$

3 Ecuaciones equivalentes. Reglas de la suma y del producto

Una vez planteada una ecuación, para resolverla se pasa a otra más sencilla que tenga las mismas soluciones.

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones; es decir, si toda solución de la primera lo es de la segunda, y recíprocamente.

Las siguientes reglas o criterios de equivalencia, basadas en las igualdades numéricas, permiten pasar de una ecuación a otra equivalente.

Luca Pacioli (1445-1514). Monje franciscano nacido en Italia. Publicó en 1494 su obra Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità, *que supuso una importante compilación de todos los trabajos aritméticos, algebraicos, geométricos y comerciales conocidos hasta entonces.*

Regla de la suma

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica, la ecuación resultante es equivalente a la dada.

Suma: $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$

Transposición: $A + C = B \Leftrightarrow A = B - C$

En una ecuación se puede pasar un término de un miembro a otro cambiándolo de signo.

Regla del producto

APLICACIÓN

$$6x - 2 = 16$$
$$6x - 2 + 2 = 16 + 2$$
$$6x = 18$$
$$x = \frac{18}{6} = 3$$

Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número, distinto de cero, la ecuación resultante es equivalente a la dada.

Producto: $A = B \text{ y } C \neq 0 \Leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C$

Simplificación: $A \cdot C = B \cdot C \text{ y } C \neq 0 \Leftrightarrow A = B$

Se puede reducir una ecuación multiplicando o dividiendo ambos miembros por un mismo número no nulo.

EJERCICIOS RESUELTOS

5 $3x + 4 = 13 \Leftrightarrow 3x = 13 - 4$ (transposición: se resta a los dos miembros 4)
$\Leftrightarrow 3x = 9$ (se opera)
$\Leftrightarrow x = 3$ (se simplifica)

6 $5x + 4 = 20 + x \Leftrightarrow 5x = 20 + x - 4$ (transposición)
$\Leftrightarrow 5x - x = 20 - 4$ (transposición)
$\Leftrightarrow 4x = 16$ (se opera)
$\Leftrightarrow x = 4$ (dividiendo por 4 los dos miembros)

4 Resolución de ecuaciones de primer grado

CUIDADO CON LOS PARÉNTESIS Y LOS SIGNOS MENOS

Al quitar un paréntesis precedido del signo menos (−) hay que cambiar todos los signos de los términos del paréntesis:

$-3(x-2) = -3x + 6$

Si hay denominadores, el signo menos (−) que precede a una fracción hace cambiar el signo de todos los términos de la misma:

$-\frac{3x-5}{20} = \frac{x}{5}$

$-\frac{3x}{20} + \frac{5}{20} = \frac{x}{5}$

Una ecuación se dice que es de primer grado cuando después de aplicar los criterios de equivalencia resulta de la forma:

$$ax = b, \qquad a \neq 0 \qquad [1]$$

Observa que si $a = 0$, la ecuación no es de primer grado.

Si dividimos por a los dos miembros de la ecuación [1] se obtiene el valor de la incógnita: $x = \frac{b}{a}$, entonces decimos que hemos despejado la incógnita.

Toda ecuación de primer grado tiene siempre solución única.

En la resolución de una ecuación de primer grado conviene seguir un orden para facilitar la tarea y no cometer errores:

a) Quitar denominadores.
   Se puede hacer multiplicando la ecuación:
   - por el producto de los denominadores, o
   - por el mínimo común múltiplo, m.c.m., de los denominadores.

b) Quitar paréntesis.

c) Suprimir los términos iguales de ambos miembros.

d) Pasar a un miembro los términos en x y al otro los numéricos.

e) Reducir términos semejantes y operar.

f) Despejar la incógnita.

EJERCICIOS RESUELTOS

7 **Resolver la ecuación:** $2(x+1) - 3(x-2) = x + 6$

$2(x+1) - 3(x-2) = x+6$	Quitamos paréntesis
$\Leftrightarrow 2x + 2 - 3x + 6 = x + 6$	Suprimimos términos iguales
$\Leftrightarrow 2x + 2 - 3x = x$	Pasamos a un miembro la incógnita
$\Leftrightarrow 2 = x - 2x + 3x$	Reducimos términos semejantes
$\Leftrightarrow 2 = 2x$	Despejamos la incógnita
$\Leftrightarrow x = 1$	

8 **Resolver la ecuación:**

$$\frac{x-1}{4} - \frac{x-5}{36} = \frac{x-5}{9} \Leftrightarrow \frac{9(x-1)}{36} - \frac{x-5}{36} = \frac{4(x-5)}{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(x-1)-(x-5)}{36} = \frac{4(x-5)}{36}$$

$$\Leftrightarrow 9(x-1) - (x-5) = 4(x-5)$$

$$\Leftrightarrow 9x - 9 - x + 5 = 4x - 20$$

$$\Leftrightarrow 9x - x - 4x = 9 - 5 - 20$$

$$\Leftrightarrow 4x = -16$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

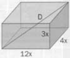
5 Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones de primer grado permiten resolver problemas en contextos muy diversos. Así, por ejemplo, son frecuentes los problemas sobre números y cantidades, problemas sobre edades, problemas de fuentes y obreros, problemas de relojes, problemas de móviles, problemas de geometría, etc.

A continuación se presentan algunos de estos problemas.

EJERCICIOS RESUELTOS

9 En un ortoedro las tres dimensiones son proporcionales a los números 3, 4 y 12 y su suma es 38. Hallar las dimensiones y la diagonal del ortoedro.



Sean sus lados: $3x$, $4x$ y $12x$.

$3x + 4x + 12x = 38 \Rightarrow 19x = 38 \Rightarrow x = 2$

Por tanto, la medida de los lados es 6, 8 y 24.

La medida de la diagonal es:

$$D = \sqrt{6^2 + 8^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26$$

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Para resolver problemas de geometría es fundamental conocer las principales relaciones y fórmulas sobre longitudes, ángulos, áreas y volúmenes.

Además se aconseja realizar un dibujo que facilite la comprensión del problema.

10 Las tres cuartas partes de la edad de la madre de Concha exceden en 15 años a la edad de esta. Hace 4 años la edad de la madre era doble de la de la hija. Hallar las edades de ambas.

	Hace 4 años	Hoy
Edad de Concha	x	$x + 4$
Edad de su madre	$2x$	$2x + 4$

Del enunciado se deduce: $\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 4 + 15$

$6x + 12 = 4(x + 19)$; $6x - 4x = 76 - 12$; $2x = 64$; $x = 32$ años.

Edad actual de Concha: $x + 4 = 32 + 4 = 36$ años.

Edad actual de su madre: $2x + 4 = 2 \cdot 32 + 4 = 68$ años.

PROBLEMAS DE EDADES

En estos problemas hay que tener en cuenta la edad en el presente, en el pasado y en el futuro. Además se ha de considerar que el tiempo pasa igual para todos.

11 Un grifo tarda 3 horas en llenar un depósito y otro tarda 2 horas en llenarlo. ¿Cuánto tardarán en llenar el depósito los dos grifos a la vez?

Lo que llena un grifo en una hora es $\frac{1}{3}$ de depósito.

Lo que llena el otro grifo en una hora es $\frac{1}{2}$ depósito.

Sea x el tiempo que tardan los dos grifos en llenar el depósito, entonces en una hora los dos grifos juntos llenan $\frac{1}{x}$ de depósito.

Identificando:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{5}\text{ h} \Rightarrow x = 1 \text{ h } 12 \text{ min}$$

PROBLEMAS DE FUENTES

La idea para resolver problemas de fuentes o de grifos es la siguiente:

La parte de depósito que llena una fuente en una hora, más la que llena otra fuente en una hora, es igual a lo que llenan las dos juntas en una hora.

PROBLEMAS DE OBREROS

La idea para resolver problemas sobre el trabajo realizado por obreros es análoga a la idea de las fuentes.

El trabajo realizado por un obrero en una hora, más el trabajo realizado por otro en una hora, es igual al trabajo realizado por los dos en una hora.

12 **Trabajando juntos, 2 obreros tardan en hacer un trabajo 17 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?**

Sea x el tiempo que tarda el obrero más rápido, el otro lo realizará en un tiempo igual a 2x.

El obrero más rápido en una hora realiza $\frac{1}{x}$ del trabajo.

El obrero más lento en una hora realiza $\frac{1}{2x}$ del trabajo.

Juntos, en una hora realizan $\frac{1}{17}$ del trabajo.

Identificando: $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{17} \Rightarrow \frac{2+1}{2x} = \frac{1}{17} \Rightarrow 51 = 2x \Rightarrow$

$$x = \frac{51}{2} = 25 \text{ h } 30 \text{ min; el otro tardará el doble: } 51 \text{ h}$$

PROBLEMAS SOBRE MÓVILES

Suponemos que se trata de un movimiento uniforme, es decir, a velocidad constante sin aceleraciones, ni frenazos. La distancia, e, recorrida por un móvil a una velocidad, v, en un tiempo t, viene dada por la siguiente fórmula:

$$e = v \cdot t$$

Despejando v, resulta:

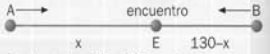
$$v = \frac{e}{t}$$

Despejando t, resulta:

$$t = \frac{e}{v}$$

13 **Dos ciclistas salen en sentido contrario a las 10 de la mañana de dos pueblos A y B situados a 130 km de distancia. El ciclista que sale de A pedalea a una velocidad constante de 30 km/h, y el ciclista que sale de B, a 20 km/h. ¿A qué distancia de A se encontrarán y a qué hora?**

Hacemos el siguiente gráfico:



El tiempo que tardan en recorrer los trayectos AE y BE es el mismo.

Sea x la distancia AE, entonces 130 − x es la distancia BE.

Los espacios recorridos son proporcionales a sus velocidades; por tanto:

$$\frac{x}{30} = \frac{130 - x}{20} \Rightarrow 20x = 30\,(130 - x)$$

$$20x = 3\,900 - 30x;\ 50x = 3\,900 \Rightarrow x = \frac{3\,900}{50} = 78 \text{ km}$$

Así pues, se encuentran a 78 km de A.

El ciclista que sale de A tarda en recorrer los 78 km:

$t = \frac{78}{30} = 2$ h 36 min. Por tanto, se encuentran a las 12 h 36 min.

PROBLEMAS SOBRE RELOJES

En la resolución de problemas sobre relojes hay que tener en cuenta que el minutero tiene una velocidad 12 veces mayor que la aguja horaria. Por tanto, el camino recorrido por el minutero es 12 veces mayor que el que recorre el horario.

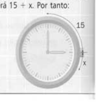
14 **Un reloj señala las tres. ¿A qué hora se superpondrán las manecillas?**

Si llamamos x a los minutos que recorre la aguja horaria hasta superponerse, el minutero, que está en las 12, recorrerá 15 + x. Por tanto:

$12x = 15 + x$

$11x = 15$

$x = \frac{15}{11} = 1 \text{ min } 21\,\frac{9}{11} \text{ s}$



Por tanto, la hora es: 3 h, 16 min, $21\,\frac{9}{11}$ s

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Leer detenidamente el enunciado.
- Hacer un dibujo.
- Estudiar todos los casos posibles.
- Interpretar y comprobar el resultado.

PROBLEMA

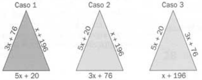
Los lados de un triángulo, en centímetros, miden $5x + 20$; $3x + 76$; y $x + 196$. Sabiendo que el triángulo es isósceles, ¿cuál debe ser el valor de x para que el perímetro sea el mayor posible?

LEER DETENIDAMENTE EL ENUNCIADO

- Si el triángulo es isósceles se cumple que dos lados son iguales y el otro desigual. Dos de las tres expresiones algebraicas que da el enunciado deben ser iguales.

ESTUDIAR TODOS LOS CASOS POSIBLES

- Se pueden presentar las siguientes situaciones:



Caso 1:	$3x + 76 = x + 196$; $2x = 120 \Rightarrow x = 60$ cm
Los lados miden:	256 cm, 256 cm, 320 cm $\Rightarrow$ p = 832 cm
Caso 2:	$5x + 20 = x + 196$; $4x = 176 \Rightarrow x = 44$ cm
Los lados miden:	240 cm, 240 cm, 208 cm $\Rightarrow$ p = 688 cm
Caso 3:	$5x + 20 = 3x + 76$; $2x = 56 \Rightarrow x = 28$ cm
Los lados miden:	160 cm, 160 cm, 224 cm $\Rightarrow$ p = 544 cm

INTERPRETAR Y COMPROBAR EL RESULTADO

- Por tanto, el perímetro mayor se obtiene en el primer caso y entonces x vale 60 cm.

  Los lados miden: 256 cm, 256 cm, 320 cm

  Estas medidas, ¿representarán con toda seguridad los lados de un triángulo?

  Hay que tener en cuenta que tres longitudes cualesquiera no siempre son los lados de un triángulo; por ejemplo: 4, 5 y 10 cm no forman un triángulo.

  Se comprueba que, en efecto, los lados obtenidos forman un triángulo válido. Para ello, hay que recordar que: «Tres lados forman un triángulo si cada uno es menor que la suma de los otros dos».

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Escribe con una incógnita las siguientes ecuaciones:

a) La suma de dos números consecutivos es 21.
b) La suma de tres números consecutivos es 30.
c) La suma de dos números impares consecutivos es 32.
d) La suma de dos números pares consecutivos es 62.
e) Un número más su quinta parte es 12.
f) La suma de tres números proporcionales a 2, 3 y 4 es 45.
g) La suma de tres números inversamente proporcionales a 4, 6 y 18 es 578.
h) La suma de tres múltiplos de 3 consecutivos es 66.
i) La suma de tres números pares consecutivos es 66.

2 Despeja cada una de las letras de las fórmulas:

a) $V = abc$ c) $V = a^2 h$
b) $S = \frac{b\,h}{2}$ d) $e = \frac{g\,t^2}{2}$

3 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 21$ c) $2x + 3 = 11$
b) $3x - 12 = 0$ d) $3x = 2x + 5$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x + 8 = 8x + 2$
b) $9 + 9x = 117 - 3x$
c) $21 - 7x = 41x - 123$
d) $500 - 24x = -4 - 3x$

5 Resuelve las siguientes ecuaciones quitando previamente los paréntesis:

a) $3x + 100 = 5\,(200 - 3x)$
b) $5\,(20 - x) = 4\,(2x - 1)$
c) $7\,(x - 18) = 3\,(x - 14)$
d) $4\,(x - 3) - 7\,(x - 4) = 6 - x$

6 Resuelve las siguientes ecuaciones quitando previamente los denominadores (utiliza el m.c.m.):

a) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$
b) $\frac{x-1}{1} - \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} = 0$
c) $\frac{3x-11}{20} - \frac{5x-1}{14} = \frac{x-7}{10} - \frac{5x-6}{21}$
d) $\frac{3x-17}{8} - \frac{1-4x}{13} = \frac{1-x}{4} - \frac{9+x}{6}$
e) $2 + \frac{3x-1}{15} + \frac{x-4}{5} = \frac{x+4}{3}$
f) $\frac{5x+7}{2} - \frac{3x+9}{4} = \frac{2x+4}{3} + 5$

7 En las siguientes ecuaciones, utiliza la regla de la igualdad de fracciones «producto de extremos = producto de medios»:

a) $\frac{3x-16}{x} = \frac{5}{3}$ c) $\frac{9+x}{19-x} = \frac{2}{3}$
b) $\frac{21-x}{23-x} = \frac{2}{3}$ d) $\frac{30+x}{20+x} = \frac{5}{4}$

PROBLEMAS PARA APLICAR

8 Una botella y su corcho cuestan juntos 1 euro. La botella cuesta 9 veces más que el corcho. ¿Cuánto cuesta la botella y cuánto cuesta el corcho?

9 La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 573. ¿Cuáles son dichos números?

10 El perímetro de un triángulo isósceles es 180 cm. Cada uno de los lados iguales es 30 cm mayor que la base. ¿Cuánto mide cada lado?

11 Un triángulo tiene 72 m de perímetro y es semejante a otro cuyos lados son 3 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?

ACTIVIDADES

12 Si el lado de un cuadrado aumenta en 7 cm, su superficie aumenta en 301 cm^2. Halla el lado.

13 Dos números suman 37 y la diferencia de sus cuadrados es 111. Halla estos números.

14 Divide el número 68 en dos sumandos, tales que la diferencia de sus cuadrados sea 816.

15 De un barril lleno de agua se saca la mitad de contenido y después un tercio del resto, quedando en él 200 litros. Calcula la capacidad del barril.

16 De un capital de 200 euros se ha colocado una parte al 5 % y la otra al 4 %. La primera produce anualmente 2,80 euros más que la segunda. Halla las dos partes del capital.

17 Halla dos números naturales consecutivos sabiendo que la suma de la cuarta y quinta parte del primero y la suma de la tercera y séptima del segundo son también números naturales consecutivos.

18 La diferencia de dos números es $\frac{1}{6}$. El triple del mayor menos el duplo del menor es 1. Hállalos.

19 Dos números suman 51. Si el primero lo dividimos entre 3 y el segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1. Halla los números.

20 Halla dos números sabiendo que su diferencia es 2 y la diferencia de sus cuadrados es 24.

21 Divide 320 en dos sumandos de modo que al dividir la mayor por la menor se obtenga 8 de cociente y 5 de resto.

22 Reparte 200 euros entre tres personas, de manera que la primera reciba 10 euros más que la segunda, y esta reciba 20 euros más que la tercera.

23 Los ángulos de un triángulo son proporcionales a los números 2, 3 y 4. Hállalos.

24 Halla los lados de un triángulo isósceles de 72 cm de perímetro sabiendo que la razón de la base a uno de los lados iguales es de 2 a 3.

25 Un reloj señala las 6 de la tarde. ¿A qué hora volverán a estar por primera vez la agujas del reloj en línea recta?

26 En una reunión de chicos y chicas, el número de estas excede en 26 al de aquellos. Después de haber salido 15 chicos y 15 chicas, quedan triple de estas que de aquellos. Halla el número de chicos y chicas que había en la reunión.

27 Una persona realiza $\frac{3}{5}$ partes de un viaje en ferrocarril, los $\frac{7}{8}$ del resto en coche y los 26 km restantes en moto. ¿Cuántos kilómetros recorre?

28 Un poste tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ de su longitud, $\frac{2}{5}$ del resto sumergido en agua, y la parte emergente mide 6 m. Halla la longitud del poste.

29 Se han consumido las $\frac{7}{8}$ partes de un bidón de aceite. Añadiendo 38 litros se llena hasta las $\frac{3}{5}$ partes. Calcula la capacidad del bidón.

30 Tres amigos juegan un décimo de lotería, que resulta premiado con 6 000 euros. Calcula cuánto corresponde a cada uno, sabiendo que el primero juega doble que el segundo y este triple que el tercero.

31 Un padre deja al morir cierto capital, con la condición de que se reparta entre sus tres hijos proporcionalmente a sus edades, que son 10, 15 y 20. Las partes del hijo mayor y del menor suman 42 000 euros. Hallar lo que corresponde a cada uno y la cantidad heredada.

32 Un padre tiene 39 años y su hijo 15. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era el triple que la edad del hijo?

33 Un señor tiene 42 años y su hijo 10 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple que la del hijo?

34 Una señora tiene 70 años y su hijo la mitad. ¿Cuántos años hace que la madre tenía 3 veces la edad del hijo?

35 Preguntado un padre por la edad de su hijo, contesta: «Si del doble de los años que tiene se le quitan el triple de los que tenía hace 6 años se tendrá su edad actual». Halla la edad del hijo en el momento actual.

36 Un padre tiene 37 años, y las edades de sus tres hijos suman 25 años. ¿Dentro de cuántos años las edades de los hijos sumarán tanto como la edad del padre?

37 De un punto salen dos personas, una en dirección norte y la otra en dirección oeste. La primera marcha a 6 km/h, y la segunda, a 8 km/h. ¿Qué tiempo tardarán en estar una de otra a 5 km de distancia?

38 Un tren recorre la distancia entre dos ciudades A y B a 70 km/h, en un cierto tiempo. Si aumenta su velocidad en 10 km por hora, realiza el mismo recorrido en 1 hora menos. Halla la velocidad y el tiempo que tarda en el primer viaje.

39 A una fiesta asistieron 20 personas. María bailó con siete muchachos; Olga con ocho; Vera con nueve, y así hasta llegar a Nina, que bailó con todos ellos. ¿Cuántos muchachos había?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

40 ¿Son identidades o ecuaciones?

a) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
b) $x^2 + y^2 = 2xy$

41 Sin operar, encuentra las soluciones:
$(x + 2)(x - 1)(3x + 4) = 0$

42 Detecta dónde está el error:

a) $x - (2x + 1) = 2x \Leftrightarrow x - 2x + 1 = 2x$
b) $(x + 1)(x - 1) = (x - 1) \Leftrightarrow x + 1 = 1$
c) $\frac{x}{5} - \frac{x+3}{2} = x + 5 \Leftrightarrow \frac{x}{5} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = x + 5$

43 Explica qué ocurre con este texto: «Piensa un número. Multiplícalo por 7. Réstale el número que has pensado. Divide el resultado obtenido por 6».

44 En $\frac{3}{2} - x = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ obtenemos $x = 2$.

¿Es correcto el resultado?

45 La ecuación $6 + \frac{4x}{2} = \frac{x}{3}$ y la ecuación $6 + 12x = 2x$, ¿son equivalentes?

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

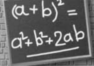
46 Un campamento se encuentra a 3 km de una carretera recta. Otro está en la carretera a 5 km del primero. Los directores quieren construir una piscina en la carretera que equidiste de los campamentos. ¿A qué distancia de cada uno se construirá la piscina?

47 Un granjero tiene 12 caballos de 9 y 11 años. La suma de sus edades es 122 años. ¿Cuántos caballos había de cada edad?

48 En un hotel hay 5 cestas de peras; 4 de ellas contienen en total 84 peras. La quinta cesta tiene 4 peras menos que la media de las cinco. ¿Cuántas peras hay en la quinta cesta?

49 El área de un rectángulo es 360 m^2. Si su base se incrementa en 10 m y su altura disminuye en 6 m, el área no cambia. Halla el perímetro del rectángulo inicial.

MURAL DE MATEMÁTICAS



Leonardo de Pisa

MEMORIAS DE ÁFRICA

Leonardo de Pisa era hijo de un comerciante italiano llamado Bonaccio, por eso todos le conocían como "el hijo de Bonaccio" o Fibonacci. Su padre tenía negocios en el norte de África y Leonardo pasaba allí mucho tiempo.

En África aprendió a contar y a calcular como los árabes. Estos tenían un sistema, llegado de la India, mucho más cómodo y práctico que las equis, uves, ces e íes de los romanos, que se usaban todavía en Europa.

En el llamado *Libro del ábaco*, escrito en 1202, explica la numeración árabe, que es la que todavía usamos todos. En ese mismo libro hablaba sobre métodos algebraicos y problemas comerciales, seguramente planteados para ayudar a su padre en las cuentas del negocio.

Fibonacci fue el matemático más original de su época y tuvo gran influencia en la mayoría de los algebristas del Renacimiento.

ECUACIONES COCIDAS

Hace más de 4 000 años los babilonios, que vivían en los territorios de lo que ahora es Irak, constituían un imperio grande y poderoso. Y no solo por su fuerza militar, sino también por la de sus conocimientos.

En la civilización babilónica se produjeron importantes hitos matemáticos. Se sabe, por ejemplo, que conocían algunas ecuaciones de primer y segundo grado. Pero ¿cómo podemos saberlo si han pasado ya más de cuarenta siglos? Gracias al barro.

Los babilonios escribían sus letras y signos con unos punzones sobre tablas de barro que luego cocían para que no se perdiera lo escrito. Algunas de esas tablas se han encontrado recientemente y nos han permitido saber lo listos que eran nuestros tatarabuelos de Babilonia.

UNA COSA MISTERIOSA

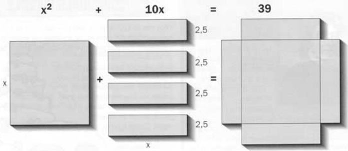
El famoso matemático árabe Al-Jwarizmi llamaba *sahy* (cosa) a la incógnita de una ecuación. Esa misma palabra y su traducción al latín (*res*) y al castellano (cosa) se siguieron usando durante siglos. Tanto es así que el álgebra llegó a llamarse "el arte de la cosa".

YO HABLO ESPAÑOL, INGLÉS Y ALGEBRAICO

El famoso físico y matemático inglés **Isaac Newton** decía en uno de sus libros que **"para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema del inglés u otra lengua al idioma algebraico".**

Ecuaciones de segundo grado

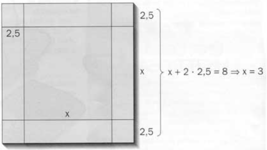
8



Así imaginó Al-Jwarizmi (siglo IX) representada la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 10x = 39$$

Para resolverla no tuvo más que completar el cuadrado de la figura final con cuatro cuadrados en las esquinas, todos ellos de lado 2,5:



El área total se obtiene aumentando la anterior en $2{,}5^2 \times 4 = 25$ unidades. Formó así un cuadrado de $39 + 25 = 64$ unidades, cuyo lado mide entonces 8.

Restando al lado del nuevo cuadrado la medida del lado de los dos cuadrados pequeños ($2 \cdot 2{,}5 = 5$) queda: $8 - 5 = 3$. Encontró de este modo la solución: $x = 3$. En realidad, la ecuación tiene también la solución $x = -13$, que no se puede hallar geométricamente.

En esta unidad vas a aprender procedimientos más sencillos para resolver ecuaciones de segundo grado, y otras de grado superior, encontrando todas las soluciones.

1 Ecuaciones de segundo grado

Definición. Soluciones

Las ecuaciones de segundo grado son aquellas en las que la incógnita aparece **elevada al cuadrado** y no tienen términos de grado mayor.

Una ecuación de segundo grado con una incógnita puede reducirse siempre a la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con} \quad a \neq 0$$

Cuando una ecuación de segundo grado está expresada de esta forma, se dice que está en **forma general**.

Un número es solución de una ecuación de segundo grado si al sustituirlo en el lugar de la incógnita resulta una igualdad numérica.

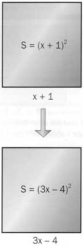
Criterios de equivalencia

De la ecuación $(x + 1)^2 = (3x - 4)^2$, extrayendo la raíz cuadrada en los dos miembros, se obtienen dos ecuaciones:

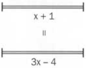
$$x + 1 = 3x - 4 \qquad\qquad x + 1 = -(3x - 4)$$

según se tome el mismo o distinto signo en ambos miembros. La ecuación de segundo grado es equivalente a las dos de primer grado, consideradas conjuntamente. Esto quiere decir que las soluciones de las ecuaciones de primer grado son también soluciones de las de segundo grado; y viceversa, cada una de las soluciones de la ecuación de segundo grado es solución de una de las ecuaciones de primer grado.

En general, esta regla se puede formular así:



Si los dos cuadrados tienen la misma área es porque sus lados son iguales.



Si se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros de una ecuación, se obtienen dos ecuaciones que son equivalentes conjuntamente a la primera.

Si llamamos A y B a los dos miembros de una ecuación, podemos escribir esta regla así:

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{A} = \sqrt{B} \\ \sqrt{A} = -\sqrt{B} \end{cases}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

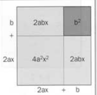
1 **Escribir las dos ecuaciones de primer grado equivalentes conjuntamente a la ecuación $(x + 1)^2 = 9$.**

Se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros, y queda:

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{9}, \qquad x + 1 = 3$$
$$\sqrt{(x+1)^2} = -\sqrt{9}, \qquad x + 1 = -3$$

2 Resolución de la ecuación de segundo grado

FORMANDO CUADRADOS



El cuadrado de un binomio:
$4a^2x^2 + 2(2axb) + b^2 = (2ax + b)^2$

Método de formación de cuadrados

En la ecuación de segundo grado aparece dos veces la incógnita, lo que hace más complicado despejarla. Para conseguir aislar la x se utiliza el método de formación de cuadrados ideado por Al-Jwarizmi.

El método consiste en tratar de escribir una expresión equivalente en la que la x aparezca solo una vez. Observa el siguiente proceso para resolver la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

- La expresión $x^2 - 4x + 3$ se puede escribir como $x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 3$.

  Los dos primeros sumandos forman parte del desarrollo de la expresión

  $$(x - 2)^2 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2$$

- Para completar el cuadrado $(x - 2)^2$ es necesario que aparezca el sumando 2^2. Esto se consigue sumando y restando 2^2 a la expresión anterior:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 = (x^2 - 4x + 2^2) - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1$$

La ecuación es equivalente a $(x - 2)^2 - 1 = 0$, en la que se despeja la x:

$$(x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2 \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = 3$$

EJERCICIOS RESUELTOS

2 Formar un cuadrado a partir de la expresión $x^2 + 4x - 1$.

Escribimos: $x^2 + 4x - 1 = x^2 + 2 \cdot 2x - 1$

Comparamos con el desarrollo: $(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2x + 4$. Falta el 4.

Sumamos y restamos 4: $x^2 + 4x - 1 = x^2 + 4x + 4 - 4 - 1 =$
$= (x + 2)^2 - 5$

3 Formando un cuadrado, resolver la ecuación $x^2 - 3x - 7 = 0$.

Escribimos:

$$x^2 - 3x - 7 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x - 7$$

Comparamos con el desarrollo:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}. \quad \text{Falta } \frac{9}{4}.$$

Sumamos y restamos $\frac{9}{4}$:

$$x^2 - 3x - 7 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 7 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}$$

La solución de la ecuación se obtiene despejando x:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{37}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2}$$

Método general

Si generalizamos el método anterior obtenemos una fórmula que nos da x en función de a, b y c. El procedimiento para obtener la fórmula es el siguiente:

- Para que aparezca fácilmente un cuadrado perfecto se multiplica la ecuación por 4a:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

- Se suma y se resta b^2 para completar el cuadrado perfecto:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0 \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

- Se extrae la raíz cuadrada:

$$2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas soluciones se pueden resumir en una sola fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cada uno de los signos de la fórmula da lugar a una de las dos soluciones de la ecuación.

Alegoría del encuentro de lo conocido, un número entero, y lo desconocido, la x.
(Saúl Steinberg, 1962)

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Resolver las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

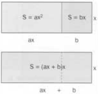
b) $-x^2 + 7x - 10 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-2} = \dfrac{-7 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

c) $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Mohammed ibn-Musa Al-Jwarizmi *(léase Al-juarizmi) (780-846). Matemático árabe, trabajó en la biblioteca del califa Al-Mahmun en Bagdad. De su nombre deriva la palabra algoritmo. Es el autor del trabajo Al-jabr wa'l muqâbala, del cual procede la palabra álgebra. Introdujo en Occidente el sistema hindú de numeración decimal, que explicó con todo detalle en su obra Aritmética.*

3 Resolución de ecuaciones incompletas de segundo grado

FACTORIZAR



La superficie de los dos rectángulos es la misma:
$ax^2 + bx = (ax + b)x$

Si en la ecuación $ax^2 + bx + c$ alguno de los coeficientes es nulo, se dice que es una **ecuación incompleta**. Ejemplos de ecuaciones incompletas son:

$3x^2 + 5 = 0,$ en la que $b = 0$

$4x^2 + 2x = 0,$ en la que $c = 0$

$6x^2 = 0,$ en la que $b = c = 0$

Las ecuaciones incompletas se resuelven directamente. Veamos cada uno de los casos:

$ax^2 + c = 0$ Se despeja la incógnita: $x^2 = -\dfrac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

$ax^2 = 0$ Se despeja la incógnita: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$ax^2 + bx = 0$ Se factoriza la ecuación: $x \cdot (ax + b) = 0$

Teniendo en cuenta que si el producto de dos o más factores es cero al menos uno de ellos debe ser cero, queda:

$$x \cdot (ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \qquad x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

RECUERDA

$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ó $B = 0$

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$

b) $2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3, x = -3$

d) $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}, x = -\dfrac{3}{2}$

e) $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$

f) $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$

g) $8x^2 + 16x = 0 \Leftrightarrow 8x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$

h) $3x^2 - 4 = 28 + x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4, x = -4$

i) $(x - 5)(x + 1) + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0, x = 4$

j) $(3x + 2)(3x - 2) = 77 \Leftrightarrow 9x^2 - 4 = 77 \Leftrightarrow 9x^2 = 81$
$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3, x = -3$

4 Número de soluciones

Si se analiza el signo de la expresión que aparece en el radicando de la fórmula, $b^2 - 4ac$, es posible saber el número de soluciones de la ecuación:

- Si $b^2 - 4ac$ es **positivo**, existen dos raíces cuadradas y la ecuación tiene **dos** soluciones reales y distintas.
- Si $b^2 - 4ac$ es **cero**, la raíz cuadrada es cero y la ecuación tiene **una** sola solución. En este caso las dos raíces son iguales y se dice que es una raíz doble.
- Si $b^2 - 4ac$ es **negativo**, no existen raíces cuadradas reales y la ecuación no tiene soluciones reales.

La expresión $D = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante**, porque permite distinguir o discriminar el número de soluciones de una ecuación de segundo grado.

En cada uno de los casos anteriores la factorización de la ecuación se hace del siguiente modo:

Si la ecuación tiene dos raíces x_1 y x_2, se escribe:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Si la ecuación tiene una raíz doble x_1, se escribe:

$$a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2 = 0$$

Si la ecuación no tiene raíces reales, entonces no se puede factorizar y se dice que es **irreducible**.

RESUMEN

$$b^2 - 4ac \begin{cases} > 0, \text{ dos soluciones} \\ = 0, \text{ una solución} \\ < 0, \text{ ninguna solución} \end{cases}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Averiguar el número de soluciones de las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 + 5x - 2 = 0$
El discriminante vale $D = 25 - 4(-2) = 33 > 0$, luego la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

b) $2x^2 + x + 4 = 0$
El discriminante vale $D = 1 - 4 - 2 - 4 = -31 < 0$, luego la ecuación no tiene ninguna solución.

c) $3x^2 - 6x + 3 = 0$
El discriminante vale $D = 36 - 36 = 0$, luego la ecuación tiene una única raíz doble.

7 **Determinar s de modo que las dos raíces de la ecuación $x^2 - sx + 36 = 0$ sean iguales.**

Si las dos raíces son iguales, el discriminante $b^2 - 4ac$ debe ser nulo:

$$b^2 - 4ac = s^2 - 144 = 0 \iff s = 12 \text{ o } s = -12$$

5 Suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado

A partir de la fórmula que permite hallar las raíces de una ecuación de segundo grado se puede obtener el valor de su suma:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

De mismo modo, se obtiene el producto:

$$\begin{aligned} p = x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})\ (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{5a^a} \\ &= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Se obtienen así las siguientes fórmulas:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dividiendo por a la ecuación general de segundo grado, queda:

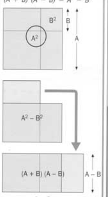
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Entonces el coeficiente de x da la suma de las raíces cambiada de signo, y el término independiente es el producto de las raíces:

$$x^2 - sx + p = 0$$

RECUERDA

$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$



$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

8 Calcular la suma y el producto de las raíces de $2x^2 + 8x - 9 = 0$.

Aplicando las fórmulas anteriores, se obtiene:

Suma de las raíces: $s = -\frac{8}{2} = -4$ Producto de las raíces: $p = -\frac{9}{2}$

9 Calcular el valor de dos números sabiendo que su suma es 13 y su producto es 42.

Los números que se buscan son las soluciones de una ecuación de segundo grado, tal que la suma de sus raíces es 13 y su producto 42. Entonces:

$13 = -\frac{b}{a}$ y $42 = \frac{c}{a}$ Se trata de la ecuación: $x^2 - 13x + 42 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 168}}{2} = \frac{13 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Las soluciones son 7 y 6.

6 Resolución de ecuaciones incompletas de tercer y cuarto grado

Algunas ecuaciones de tercer y cuarto grado se pueden resolver transformándolas en ecuaciones de segundo grado. Son las ecuaciones llamadas bicuadradas y aquellas en las que faltan los últimos términos.

Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de cuarto grado en las que faltan los términos en x^3 y en x. Su forma general es:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Para resolverlas, se pueden escribir así:

$$a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad az^2 + bz + c = 0$$

Esta ecuación es de segundo grado tomando como incógnita $z = x^2$. Una vez calculados los valores de z, se calculan los de x extrayendo las raíces cuadradas. Se obtienen así hasta cuatro posibles soluciones de la ecuación bicuadrada.

EJERCICIOS RESUELTOS

10 Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Haciendo $z = x^2$ resulta la ecuación: $z^2 - 13z + 36 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} z_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ z_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación bicuadrada son: $x = \pm 3$, $x = \pm 2$

Otras ecuaciones incompletas

Las ecuaciones de tercer grado en las que falta el término independiente, $ax^3 + bx^2 + cx = 0$, y las de cuarto grado en las que faltan los dos últimos términos, $ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$, se pueden resolver también reduciéndolas a ecuaciones de segundo grado.

Para ello se opera del siguiente modo:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^2 + bx + c) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$$

La ecuación tiene como soluciones $x = 0$ y las que se obtengan al resolver la ecuación de segundo grado resultante.

EJERCICIOS RESUELTOS

11 Resolver la ecuación $x^3 + 12x^2 - 64x = 0$.

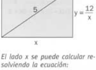
$$x^3 + 12x^2 - 64x = x \cdot (x^2 + 12x - 64) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 12x - 64 = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -16 \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación inicial son: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -16$

UNA BICUADRADA PARA RESOLVER EL PROBLEMA

En un rectángulo se conoce el área, que vale 12 cm², y la diagonal, que mide 5 cm. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

$$S = x \cdot y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$$



El lado x se puede calcular resolviendo la ecuación:

$$x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

Esta ecuación da como solución:

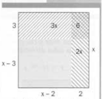
$$x = \pm 4 \qquad x = \pm 3$$

Como las medidas no pueden ser negativas, los lados del rectángulo miden:

3 cm y 4 cm

7 Resolución de ecuaciones por factorización

FACTORIZACIÓN



$(x-3)(x-2) = x^2 - 5x + 6$

La expresión $(x-1)(x+2)(x-4) = 0$ es una ecuación de tercer grado. Cuando una ecuación está escrita de este modo se puede resolver aplicando técnicas ya conocidas:

$$(x-1)(x+2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x-1=0,\ x+2=0,\ x-4=0$$
$$\Leftrightarrow x=1,\ x=-2,\ x=4$$

En general, si en una ecuación de cualquier grado, escrita en la forma $P(x) = 0$, el polinomio $P(x)$ se puede descomponer en factores de primer y segundo grado, entonces basta igualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones de primer grado y de segundo grado resultantes. Por ejemplo, una ecuación de tercer grado puede factorizarse así:

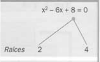
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(ax^2 + mx + n) = 0$$

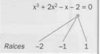
Entonces las soluciones de la ecuación se obtienen resolviendo las dos ecuaciones:

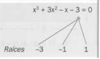
$$x - x_1 = 0 \qquad ax^2 + mx + p = 0$$

Las ecuaciones de tercer grado, o grado superior, si no tienen ninguna raíz entera no se pueden resolver por este procedimiento. **Las raíces enteras se encuentran entre los divisores del término independiente.**

RAÍCES Y TÉRMINO INDEPENDIENTE







EJERCICIOS RESUELTOS

12 **Resolver la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.**

Para la resolución se procede así:

- Posibles raíces enteras: ± 1, ± 2, que son los divisores de -2.
- Se comprueba directamente cuál de estos números es raíz:

Para $x = 1$	se tiene	$1 + 2 - 1 - 2 = 0$, raíz.
Para $x = -1$	se tiene	$-1 + 2 + 1 - 2 = 0$, raíz.
Para $x = 2$	se tiene	$8 + 8 - 2 - 2 \neq 0$, no es raíz.
Para $x = -2$	se tiene	$-8 + 8 + 2 - 2 = 0$, raíz.

En este caso las tres soluciones de la ecuación son: 1, -1 y -2.

13 **Resolver la ecuación $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$.**

Los divisores del término independiente son: $+1$ y -1. Se comprueba que de estos dos números es raíz $x = 1$.

$$2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)(2x^2 + 5x + 1) = 0 \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2x^2 + 5x + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos: $2x^2 + 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-8}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}$

$$x_1 = 1,\quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4},\quad x_3 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}$$

8 Ecuaciones radicales

Ecuaciones radicales son aquellas en las que la incógnita aparece bajo el **signo radical**. Por ejemplo, una ecuación radical es $\sqrt{x} + 2 = x$. Aquí vamos a estudiar únicamente ecuaciones con radicales cuadráticos.

Criterio de equivalencia

La ecuación $x - 3 = 4$ tiene como solución $x = 7$. Si elevamos al cuadrado los dos miembros resulta la ecuación

$$(x - 3)^2 = 4^2$$

que tiene las mismas soluciones que las ecuaciones

$x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7$ Solución de la primera ecuación.

$x - 3 = -4 \Leftrightarrow x = -1$ Solución nueva.

En general:

> Si se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación que tiene las mismas raíces que la ecuación dada y, además, las de la ecuación que se obtiene cambiando de signo uno de los miembros de la ecuación.

Procedimiento de resolución de ecuaciones radicales

Para la resolución práctica conviene seguir estos pasos:

1. Se **aísla** un radical en uno de los miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.
2. Se **elevan al cuadrado** los dos miembros.
3. Se **resuelve** la ecuación obtenida.
4. Se **comprueba** si las soluciones obtenidas verifican la ecuación inicial. Debes tener en cuenta que al elevar al cuadrado una ecuación se obtiene otra con más soluciones que la primera.

Si la ecuación tiene varios radicales, se repiten las dos primeras fases del proceso hasta eliminarlos todos.

$$\sqrt{x} + 2 = x$$

1 $\downarrow$

$$\sqrt{x} = x - 2$$

2 $\downarrow$

$$x = (x - 2)^2$$

$$\downarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

3

$x = 1$ $\quad$ $x = 4$

4

$\sqrt{1} + 2 = 3 \neq 1$ — *No es solución*

$\sqrt{4} + 2 = 4$ — *Solución*

EJERCICIOS RESUELTOS

14 Resolver la ecuación $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$.

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 6 - \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 36 + x + 4 - 12\sqrt{x+4} \Leftrightarrow x - 41 = -12\sqrt{x+4}$$

$$x^2 + 1\,681 - 82x = 144x + 576 \Leftrightarrow x^2 - 226x + 1\,105 = 0 \begin{cases} x = 5 \\ x = 221 \end{cases}$$

Comprobamos las raíces:

$$\sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5 + 4} = 3 + 3 = 6; \; \sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} \neq 6$$

De estas dos raíces solo $x = 5$ verifica la ecuación, luego la ecuación radical tiene por raíz $x = 5$.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Hacer un dibujo o esquema, si el enunciado lo requiere.
- Identificar lo que se debe averiguar (incógnita).
- Plantear una ecuación.
- Resolver la ecuación.
- Interpretar el resultado.

PROBLEMA

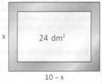
Esther quiere hacer el marco de un espejo con un listón de madera de 2 m, sin que le sobre ni le falte nada. Sabiendo que el espejo es rectangular y que tiene una superficie de 24 dm², ¿de qué longitud han de ser los trozos que ha de cortar?

HACER UN DIBUJO

- Se hace un dibujo con la forma que ha de tener el espejo, en este caso un rectángulo. Conviene señalar en el dibujo lo que se conoce y lo que no se conoce.

  Lado desconocido: x.

  Sabiendo que el listón tiene 2 m (20 dm), el perímetro del rectángulo debe ser 20, el semiperímetro será 10 y el otro lado será $10 - x$.



PLANTEAR LA ECUACIÓN

- Se plantea la ecuación que permite relacionar lo que se conoce con lo que se quiere averiguar. Puesto que la superficie es 24 dm², se tiene:

$$x\,(10 - x) = 24$$

RESOLVER LA ECUACIÓN

- La ecuación anterior es equivalente a

$$10x - x^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$$

Resolviendo la ecuación con ayuda de la fórmula general, se obtiene:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

INTERPRETAR LAS SOLUCIONES

- El listón se debe cortar en dos trozos de x dm y otros dos de $10 - x$ dm.

  Para $x_1 = 4$ se obtienen dos trozos de 4 dm y dos de 6 dm.

  Para $x_2 = 6$ se obtienen dos trozos de 6 dm y dos de 4 dm.

  Se ve que las dos soluciones coinciden.

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Escribe con una incógnita los siguientes datos:

a) Un número y su cuadrado.
b) Un número y su raíz cuadrada.
c) Los cuadrados de dos números consecutivos.
d) Los cuadrados de dos números cuya suma es 10.
e) Los cuadrados de dos números cuya diferencia es 10.
f) Los cuadrados de dos números cuyo cociente es 4.
g) Los cuadrados de dos números proporcionales a 3 y 4.
h) Los cuadrados de tres números proporcionales a 3, 4 y 5.

2 Escribe las siguientes ecuaciones con una incógnita:

a) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 213.
b) La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es 41.
c) El producto de un número por su tercera parte es 27.
d) El producto de dos números consecutivos es 72.
e) El producto de dos números pares consecutivos es 2 024.

3 Despeja cada una de las letras de las fórmulas:

a) $B = a^2c$ e) $S = \pi r^2$

b) $S = \dfrac{a^2h}{3}$ f) $a^2 = b^2 + c^2$

c) $V = a^3$ g) $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

d) $E = \dfrac{gt^2}{2}$ h) $I = \dfrac{1}{2}m(a^2 + b^2)$

4 Resuelve mentalmente (sin operar) las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 9 = 0$ d) $x^2 - 9x = 0$
b) $x^2 - 1 = 0$ e) $x^2 - 6 = 10$
c) $x^2 - x = 0$ f) $x^2 + 8 = 33$

5 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el hecho de que si el producto de dos o más factores es cero, tiene que ser cero al menos uno de ellos:

a) $(x - 1)(x - 2) = 0$ d) $(2x - 5)(7x - 3) = 0$

b) $(x - 5)(x + 11) = 0$ e) $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)(8x + 42) = 0$

c) $(2x + 6)x = 0$

6 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas sin utilizar la fórmula general:

a) $x^2 - 6x = 0$ d) $1 - 4x^2 = -8$
b) $x^2 - 25 = 0$ e) $x^2 + 11x = 0$
c) $3x^2 - 48 = 0$ f) $23 = 9x^2 - 2$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de formación de cuadrados.

a) $x^2 + 6x - 10 = 0$ d) $x^2 - 5x - 2 = 0$
b) $x^2 - 10x + 1 = 0$ e) $2x^2 + 7x + 1 = 0$
c) $x^2 + 8x - 3 = 0$ f) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

8 Resuelve las siguientes ecuaciones por el método general:

a) $x^2 - 7x - 18 = 0$ d) $x^2 - 4x + 7 = 0$
b) $3x^2 + 15x + 18 = 0$ e) $x^2 + 2x + 1 = 0$
c) $7x^2 + 21x - 28 = 0$ f) $3x^2 - 8x - 3 = 0$

9 Resuelve las siguientes ecuaciones pasándolas previamente a la forma general:

a) $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{x}{x - 2} = 1$

b) $\dfrac{2x}{x + 2} + \dfrac{x + 2}{2x} = 2$

c) $\dfrac{5x + 4}{5x - 4} + \dfrac{5x - 4}{5x + 4} = \dfrac{13}{6}$

d) $\dfrac{x + 1}{x + 2} + \dfrac{x - 1}{x - 2} = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$

e) $\dfrac{3(x^2 - 11)}{5} - \dfrac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$

A C T I V I D A D E S

10 Averigua, sin resolverlas, el número de soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$
b) $x^2 + 5x + 7 = 0$
c) $3x^2 + 8x - 1 = 0$
d) $2x^2 + 7x - 9 = 0$
e) $x^2 - 11x + 10 = 0$
f) $5x^2 - 7x + 8 = 0$

11 Halla la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, sin calcularlas previamente:

a) $x^2 + 5x + 2 = 0$
b) $5x^2 + 7x - 1 = 0$
c) $x^2 - 9x + 2 = 0$
d) $3x^2 - 9x + 11 = 0$
e) $x^2 - 5x + 5 = 0$
f) $4x^2 + 9x - 3 = 0$

12 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas de tercer y cuarto grado:

a) $x^3 - 7x^2 - 18x = 0$
b) $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$
c) $x^3 - 26x^2 + 25x = 0$
d) $x^4 + 10x^3 + 2x^2 = 0$
e) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
f) $x^4 + 8x^3 + 16x^2 = 0$

13 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
b) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$
c) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
d) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
e) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$
f) $x^4 - 97x^2 + 1296 = 0$

14 Halla las raíces reales de las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 16 = 0$
b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
c) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$
d) $x^4 - x^2 = 600$
e) $2x^4 + 9x^2 = 68$
f) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

15 Resuelve las siguientes ecuaciones pasándolas previamente a la forma general (recuerda que producto de extremos es igual a producto de medios):

a) $\dfrac{x^2 - 32}{4} = -\dfrac{28}{x^2 - 9}$
b) $\dfrac{2}{x^2 - 9} = \dfrac{x^2 - 16}{72}$

16 Resuelve las siguientes ecuaciones con un radical:

a) $\sqrt{x+4} = 7$
b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$
c) $x - \sqrt{169 - x} = 17$
d) $x + \sqrt{5x + 10} = 8$
e) $\sqrt{2x + x^2} - x - 2 = 0$
f) $x - 2\sqrt{x - 1} - 4 = 0$

17 Resuelve las siguientes ecuaciones con dos radicales:

a) $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$
b) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x} = 5$
c) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{2x + 8} = 7$
d) $\sqrt{7 + 2x} - \sqrt{3 + x} = 1$
e) $\sqrt{x + 13} = 1 + \sqrt{x + 6}$
f) $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} = 4$

18 Halla las raíces reales de las siguientes ecuaciones de tercer grado:

a) $x^3 - x^2 - 4 = 0$
b) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
c) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$
d) $6x^3 + x^2 - 26x - 21 = 0$
e) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$
f) $x^3 - 7x^2 - 2x + 14 = 0$

19 Halla las raíces reales de las siguientes ecuaciones de cuarto grado calculando previamente por comprobación alguna raíz:

a) $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$
b) $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 96x - 80 = 0$
c) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$
d) $6x^4 - 17x^3 + 7x^2 + 8x - 4 = 0$
e) $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 4x + 16 = 0$

PROBLEMAS PARA APLICAR

20 En la ecuación $x^2 + bx + 15 = 0$, una solución es 5. ¿Cuánto vale b? ¿Cuál es la otra solución?

21 En la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$, una solución es 3. ¿Cuánto vale c? ¿Cuál es la otra solución?

22 Halla dos números consecutivos cuyo producto es 380.

23 La suma de un número y su cuadrado es 42. Hállalo.

A C T I V I D A D E S

24 Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Una de ellas advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas fueron a la reunión?

25 ¿Qué número, aumentado 6 veces, tiene como raíz cuadrada 135?

26 Halla dos números cuya suma es 78 y su producto 1 296.

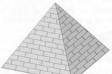
27 Halla dos números cuya suma es 14 y la de sus cuadrados 100.

28 Halla dos números positivos cuya diferencia sea 7, y la suma de sus cuadrados, 3 809.

29 Una habitación rectangular tiene una superficie de 120 m^2 y su zócalo tiene una longitud de 46 m. Halla las dimensiones de la habitación.

30 Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la cerca.

31 Una pirámide recta de base cuadrada tiene de altura 30 m y se han necesitado 2 000 m^3 de piedra para construirla. Halla el lado de la base de la pirámide.



32 Un depósito de agua tiene forma de ortoedro cuya altura es 10 m y su capacidad 4 000 m^3. Halla el lado de la base sabiendo que es cuadrada.

33 La edad de un niño será dentro de 3 años un cuadrado perfecto, y hace 3 años su edad era precisamente la raíz cuadrada de este cuadrado. Halla los años que tiene.

34 Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

35 Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área es 24 m^2.

36 Se tiene un lote de baldosas cuadradas. Si se forma con ellas un cuadrado de x baldosas por lado sobran 27, y si se toman $x + 1$ baldosas por lado faltan 40. Halla las baldosas del lote.

37 Un cuadrado tiene 44 m^2 más que otro y este 2 m menos de lado que el primero. Halla los lados de los cuadrados.

38 Aumentando un lado de un cuadrado en 4 m y los lados contiguos en 6 m se obtiene un rectángulo de doble área que el cuadrado. Halla los lados del cuadrado.

39 Un campo rectangular tiene 2 400 m cuadrados de superficie y 20 m de longitud más que de anchura. Halla las dimensiones.

40 Calcula el radio de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 3 cm se cuadruplica su área.

41 Uno de los lados de un rectángulo mide 6 cm más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones si su área es 91 cm^2?

42 Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a 3, 4 y 5. Halla estas dimensiones sabiendo que el volumen del ortoedro es 1 620 cm^3.

43 Los lados de un triángulo miden 18, 16 y 9 cm. Determina qué cantidad igual se debe restar a cada uno para que resulte un triángulo rectángulo.

44 La diagonal de un rectángulo mide 30 cm y las dimensiones de los lados son proporcionales a 3 y 4. Halla los lados.

45 Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida tres números enteros consecutivos. Halla dichos números.

46 Un cuadrado tiene 33 m^2 más que otro, y este, 1 m menos de lado que el primero. Halla los lados de los cuadrados.

47 Las medidas de los lados y la diagonal de un rectángulo son tres números pares consecutivos. Halla estos elementos.

48 Problema de las fuentes (Leonardo de Pisa).

Dos torres, una de 30 pasos y otra de 40, están separadas 50 pasos. Entre las dos torres se encuentra una fuente hacia la que descienden dos pájaros que están en las almenas de las torres. Yendo con igual velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de las torres se encuentra la fuente?

49 Problema del bambú. (Texto indio del siglo IX.)

Un bambú que mide 30 codos y que se eleva sobre un terreno plano se rompe en un punto por la fuerza del viento. Su extremidad toca el suelo a 16 codos de su pie. ¿A qué altura se ha roto?

50 Problema del junco. (De un texto indio del siglo IX.)

Un junco enraizado en el fondo de un estanque se encuentra a 90 cm de la orilla y su cabeza se eleva 30 cm sobre el agua. Por la fuerza del viento se ha inclinado de modo que su cabeza toca la orilla a ras del agua. ¿Cuál es la profundidad del estanque y la altura del junco?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

51 ¿Qué condición ha de cumplir una ecuación de segundo grado para que una de sus raíces sea 0? Pon un ejemplo que aclare la respuesta.

52 La ecuación $5x^2 - 3x + 1 = 0$ no tiene raíces reales. ¿Sabrías explicar por qué sin resolverla?

53 ¿Tiene soluciones reales una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes sean todos iguales? Pon un ejemplo.

54 El producto de las raíces de la ecuación de segundo grado es el término independiente, supuesto que el coeficiente de x^2 es 1. Justifica este resultado.

55 Si dos números son iguales, sus cuadrados también lo son; pero si los cuadrados de dos números son iguales, ¿puede asegurarse que los números lo sean? Razona la respuesta con ejemplos.

56 Para resolver una ecuación de tercer grado (con los métodos elementales) tienes que encontrar una de las raíces por comprobación. Si suponemos que la raíz es entera, ¿de quién es divisor? Pon un ejemplo.

57 Una ecuación de tercer grado tiene como término independiente 6. ¿Qué puedes decir de las raíces si las tres son enteras?

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

58 Preguntada una persona por su edad, contestó: «Sumad 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultará un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy». Halla la edad de la persona en el momento actual.

59 Determina m en la ecuación $x^2 - mx + 4 = 0$, de modo que las dos raíces de la ecuación sean iguales.

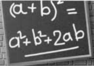
Determina c en la ecuación $2x^2 - 8x + c = 0$, de modo que las dos raíces de la ecuación sean iguales.

60 Dada la ecuación $x^2 - (m + 2)x + 10 = 0$, halla los valores de m para que las dos raíces de la ecuación se diferencien en 3 unidades.

61 Dada la ecuación $x^2 - 12x + c = 0$, halla los valores de c para que las dos raíces de la ecuación se diferencien en 16 unidades.

62 Dada la ecuación $121x^2 + bx - 28 = 0$, halla los valores de b para que las dos raíces de la ecuación se diferencien en 1 unidad.

MURAL DE MATEMÁTICAS



Galois (1811-1832)

El matemático romántico

El francés Evaristo Galois era un niño raro. O, al menos, eso decían sus profesores. Inteligente, original y con gran facilidad para las matemáticas, pero raro. Además de un gran matemático, fue el prototipo del hombre apasionado y vital del Romanticismo.

A los doce años ya discutía sobre política y sobre arte con sus profesores y se entusiasmaba con los escritores románticos.
Su mayor deseo era estudiar matemáticas, así que se preparó para ingresar en la Escuela Politécnica. Pero no consiguió aprobar.
Galois siguió sus investigaciones por su cuenta. Estudió las condiciones para que una ecuación de cualquier grado tuviera solución e hizo grandes aportaciones en este campo.

«No tengo tiempo»

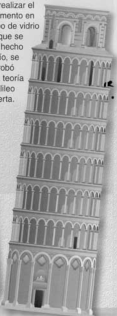
Su activa participación en la revolución de 1830 le hizo acabar en la cárcel.
El mismo día en que sale de prisión (tiene entonces veintiún años) sus enemigos lo retan en duelo.
Él acepta. Pasa toda la noche recopilando sus teorías. Angustiado porque ve que llega el amanecer, anota al margen: "No tengo tiempo, no tengo tiempo...".
A la mañana siguiente, el 30 de mayo de 1832, es herido de muerte en el duelo.

Galileo

y los cuerpos que caen

La velocidad con la que llega un cuerpo al suelo tras una caída libre en el vacío viene dada por una ecuación de segundo grado que relaciona el espacio y la velocidad.

La masa no interviene para nada. Así que la velocidad con la que llegan al suelo una bola de acero y una de corcho es la misma.
Ese problema apasionó a Galileo que, según se cuenta, dejó caer desde la torre inclinada de Pisa dos objetos de distinto peso para comprobar experimentalmente su teoría.
Mucho tiempo después, cuando se pudo realizar el experimento en un tubo de vidrio en el que se había hecho el vacío, se comprobó que la teoría de Galileo era cierta.



LO DIJO...

Ernest Mach

Físico austriaco

(1838-1916)

"La meta de la investigación es descubrir las ecuaciones que subyacen en las manifestaciones de los fenómenos".

¿SABÍAS QUE...?

Diofanto de Alejandría (¿siglo III?) utilizaba la palabra **aritmos** para designar la incógnita de una ecuación.
Se puede considerar a Diofanto como el fundador del álgebra. Su obra más conocida es una colección de 130 problemas, la mayoría de ecuaciones, titulada **Aritmética**. Diofanto introdujo símbolos para representar las cantidades desconocidas y una abreviatura para la palabra igual. Esto fue un paso muy importante hacia el álgebra simbólica actual.

Sistemas de ecuaciones

9

Federico y Alicia están jugando con monedas.

En un determinado momento, Federico le dice a Alicia: «Si me das una de tus monedas, entonces tendré el doble número de monedas que tú». Alicia se queda muy pensativa, y le contesta: «Si tú me das una moneda, entonces tendremos el mismo número de monedas». ¿Cuántas tiene cada uno?

Este tipo de problemas no se pueden resolver planteando una sola ecuación. En este caso, por ejemplo, es necesario plantear dos ecuaciones.

Con el estudio de esta unidad podrás resolver con toda facilidad este problema y otros muy parecidos que se presentan con frecuencia en la vida corriente.

1 Sistemas de ecuaciones lineales. Solución de un sistema

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones en las que las incógnitas representan los mismos valores. Los sistemas de ecuaciones se escriben así:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\} \quad [1]$$

donde los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son **números reales**.

> Una solución del sistema [1] es un par de números x_1, y_1, tales que reemplazando x por x_1 e y por y_1 se satisfacen a la vez las dos ecuaciones.

La ecuación $ax + by = c$ tiene un número indefinido de soluciones; lo mismo ocurre con la ecuación $a'x + b'y = c'$. Si existen soluciones comunes a las dos ecuaciones, estas son las soluciones del sistema.

Consideramos, por ejemplo, el sistema $\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{array}\right.$

Soluciones de $x + y = 5$:

x	−1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
y	6	5	$\frac{9}{2}$	4	3	2	1	...

Soluciones de $2x - y = 4$:

x	−1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
y	−6	−4	−3	−2	0	2	4	...

Soluciones del sistema: $x = 3$; $y = 2$.

Cuando un sistema tiene solución se llama **compatible**; en caso contrario, **incompatible**.

Un sistema puede ser incompatible porque las ecuaciones no tengan soluciones comunes o porque alguna de las ecuaciones no tenga solución. Por ejemplo, la ecuación $0x = 7$ no tiene solución; todo sistema en el que una ecuación sea de esta forma será incompatible.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones.

SUMA MARINA

Cada uno de estos animales marinos sustituye a un número del uno al cinco. El mismo animal tiene siempre igual valor. Cada fila es una suma. Averigua el valor de cada animal.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Estudiar las soluciones de los siguientes sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{array}\right\}$

a) El sistema es compatible; tiene la solución $x = 7$, $y = 5$, que es única. No hay otro par de valores que verifique a la vez las dos ecuaciones.

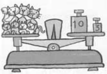
b) El sistema tiene muchas soluciones. Puedes comprobar que cualquier solución de la primera ecuación verifica la segunda, y recíprocamente.

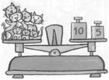
c) El sistema es incompatible, aunque existen algunos números, por ejemplo, $x = 0$, $y = -1$, que verifican la primera ecuación, y otros, por ejemplo, $x = 1$, $y = 0$, que verifican la segunda; pero no hay ningún par de números que verifique las dos ecuaciones simultáneamente.

2 Sistemas equivalentes

PLANTEA EL SISTEMA

Los gatos grandes pesan todos lo mismo, y también los gatos pequeños.
Plantea un sistema y resuélvelo si sabes.





Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Es evidente que si se cambia el orden de las ecuaciones el sistema resultante no solo es equivalente, sino que en esencia es el mismo. Algunas veces es útil hacerlo.

Las siguientes reglas o criterios, algunos ya estudiados, permiten pasar de un sistema a otro equivalente. Las comprobaremos en el sistema y las utilizaremos de paso para resolverlo.

1. Suma o diferencia de números o expresiones algebraicas

Si a los dos miembros de una ecuación de un sistema se le suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica, resulta otro sistema equivalente al dado.

$$\left.\begin{aligned} 3x &= -6 + 4y \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 4y &= -6 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

En la primera ecuación se le ha restado 4y a los dos miembros.

2. Producto o cociente por un número real no nulo

Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación de un sistema por un mismo número distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.

$$\left.\begin{aligned} 3x &= -6 + 4y \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 4y &= -6 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 4y &= -6 \\ 2x + 4y &= 16 \end{aligned}\right\}$$

La segunda equivalencia de los sistemas se obtiene multiplicando los dos miembros de la segunda ecuación por 2.

3. Suma o diferencia de ecuaciones

Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo, resulta otro sistema equivalente al dado.

$$\left.\begin{aligned} 3x &= -6 + 4y \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 4y &= -6 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 3x - 4y &= -6 \\ 2x + 4y &= 16 \end{aligned}\right\}$$

Sumando ahora a la primera ecuación la segunda se obtiene el sistema equivalente al dado:

$$\left.\begin{aligned} 5x &= 10 \\ 2x + 4y &= 16 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2 \\ 4 + 4y &= 16 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2 \\ 4y &= 12 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}\right.$$

Comprueba que la solución $x = 2$, $y = 3$ verifica los seis sistemas anteriores y que, por tanto, son equivalentes. Observa cómo esta cadena de equivalencias te lleva a la solución del sistema dado.

4. Reducción de ecuaciones

Observa el siguiente sistema:
$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 5y &= 6 \\ 7x + 8y &= 9 \\ 5x + 10y &= 15 \end{aligned}\right\}$$

La tercera ecuación es el doble de la segunda menos la primera, y la cuarta, el quíntuple de la primera.

En este caso se dice que tanto la tercera como la cuarta ecuación son función o dependen de las dos primeras.

Si en un sistema de ecuaciones lineales una ecuación depende de las restantes, puede suprimirse, y el sistema resultante es equivalente al dado.

Aplicando este criterio el sistema anterior es equivalente a:
$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 5y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

UN POCO DE INGENIO

Resuelve el sistema:
$$\left.\begin{aligned} 6\,751x + 3\,249y &= 26\,751 \\ 3\,249x + 6\,751y &= 23\,249 \end{aligned}\right\}$$
Sumando a la primera ecuación la segunda, y restando a la primera ecuación la segunda, se tiene:
$$\left.\begin{aligned} 10\,000x + 10\,000y &= 50\,000 \\ 3\,502x - 3\,502y &= 3\,502 \end{aligned}\right\}$$
Simplificando:
$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}\right.$$

EJERCICIOS RESUELTOS

2 Dado el sistema:
$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 25 \\ x + 5y &= 10 \end{aligned}\right\}$$
igualar los coeficientes de la x.

Basta con multiplicar por 3 la segunda ecuación:
$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 25 \\ 3x + 15y &= 30 \end{aligned}\right\}$$

3 Dado el sistema:
$$\left.\begin{aligned} 6x + 5y &= 29 \\ 8x - 2y &= 7 \end{aligned}\right\}$$
igualar los coeficientes de la x utilizando un múltiplo común de los mismos o el mínimo común múltiplo de ambos. Hacer después lo mismo (salvo el signo) para los coeficientes de la y.

El mínimo común múltiplo de 6 y 8 es 24. Por tanto, hay que multiplicar la primera ecuación por 4 y la segunda por 3.

El sistema equivalente que se obtiene es:
$$\left.\begin{aligned} 24x + 20y &= 116 \\ 24x - 6y &= 21 \end{aligned}\right\}$$

En el caso de la y, un múltiplo de 5 y 2 es 10. Por tanto, hay que multiplicar la primera por 2 y la segunda por 5:
$$\left.\begin{aligned} 12x + 10y &= 58 \\ 40x - 10y &= 35 \end{aligned}\right\}$$

3 Resolución de sistemas. Método de sustitución

PLANTEA EL SISTEMA

Alexis lee un libro que tiene más de 100 y menos de 200 páginas. La suma de los tres dígitos del número de páginas que tiene el libro es 10. El segundo dígito es doble que el último. ¿Cuántas páginas tiene el libro de Alexis?

Este método consiste en **despejar** una de las incógnitas de una de las ecuaciones del sistema y **sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.

De esta forma se obtiene una ecuación de primer grado con una incógnita. Veamos a continuación un ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 4x + y &= -3 \\ y - 3x &= 11 \end{aligned}\right\}$$

1.° Se despeja y en la segunda ecuación: $y = 3x + 11$.

2.° Se sustituye este valor de y en la primera ecuación: $4x + 3x + 11 = -3$.

3.° Se resuelve esta ecuación: $x = \dfrac{-14}{7}$, de donde $x = -2$.

4.° Se sustituye este valor de x en la ecuación en la que hemos despejado la incógnita y: $y = 3 \cdot (-2) + 11 = 5$.

Por tanto, la solución es: $x = -2$, $y = 5$.

Despeja siempre la incógnita que resulte más sencilla y, si existe, aquella cuyo coeficiente es 1 o -1; de esta forma se evita la aparición de denominadores.

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Resolver por sustitución el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Para utilizar el método de sustitución se procede así:

— Se despeja x en la primera ecuación: $x = 4 - 3y$.

— Se sustituye ahora este valor de x en la segunda:

$$\begin{aligned} 2(4 - 3y) - y = 1 &\Leftrightarrow 8 - 6y - y = 1 \\ &\Leftrightarrow 7 = 7y \\ &\Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

— Se sustituye $y = 1$ en la ecuación despejada $x = 4 - 3y$:

$x = 4 - 3 \Leftrightarrow x = 1$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = 1$.

5 **Resolver por sustitución el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} 6x + 5y &= 23 \\ -4x + y &= -11 \end{aligned}\right\}$$

— Se despeja y en la segunda ecuación: $y = -11 + 4x$.

— Se sustituye ahora este valor de y en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 6x + 5(-11 + 4x) = 23 &\Leftrightarrow 6x - 55 + 20x = 23 \\ &\Leftrightarrow 26x = 78 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

— Se sustituye $x = 3$ en la ecuación despejada: $y = -11 + 4x$:

$y = -11 + 12 \Leftrightarrow y = 1$

La solución del sistema es: $x = 3$, $y = 1$.

4 Resolución de sistemas. Método de reducción

Este método consiste en obtener un sistema equivalente **sumando** o **restando ecuaciones** de modo que el nuevo sistema tenga en una de las ecuaciones una incógnita menos. Veamos un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{array}\right\} \text{ sumando } \left.\begin{array}{r} x + y = 20 \\ 2x = 24 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y = 8 \\ x = 12 \end{array}\right\}$$

A veces hay que multiplicar previamente una o ambas ecuaciones por números convenientes para que los coeficientes de la incógnita que se desea eliminar sean iguales en valor absoluto. Veamos un ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + y = -3 \\ -3x + y = 11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Se multiplica por 3 la primera} \\ \text{Se multiplica por 4 la segunda} \end{array} \left.\begin{array}{r} 12x + 3y = -9 \\ -12x + 4y = 44 \end{array}\right\}$$

Se suman las dos ecuaciones: $7y = 35$.

Resuelta esta ecuación de primer grado, se sustituye el valor de la incógnita obtenida en una cualquiera de las ecuaciones dadas para hallar el valor de la otra incógnita.

También se puede volver a aplicar el método de reducción para eliminar la otra incógnita.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{array}\right\}$$

Se suma a la segunda ecuación la primera:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y = -6 \\ 5x = 10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 4y = -6 \\ x = 2 \end{array}\right\}$$

Se sustituye ahora $x = 2$ en la primera ecuación:

$$6 - 4y = -6 \Leftrightarrow y = 3$$

La solución del sistema es: $x = 2,\ y = 3$.

7 Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 6 \\ 9x + 4y = 108 \end{array}\right\}$$

Se multiplica la primera ecuación por 2:

$$\left.\begin{array}{r} 6x - 4y = 12 \\ 9x + 4y = 108 \end{array}\right\}$$

Se suma la primera ecuación a la segunda:

$$\left.\begin{array}{r} 6x - 4y = 12 \\ 15x = 120 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 6x - 4y = 12 \\ x = 8 \end{array}\right\}$$

Se sustituye $x = 8$ en la primera ecuación:

$$24 - 2y = 6 \Leftrightarrow y = 9$$

La solución del sistema es: $x = 8,\ y = 9$.

RESUELVE EL SISTEMA

A veces, el vino que se vende en el mercado es el resultado de la mezcla de vinos de distintas calidades y precios.

Un comerciante dispone de dos tipos de vino: uno de 3,35 euros y otro de 3,75 euros. Desea obtener 1 000 litros de vino de 3,50 euros/litro. ¿Podrías ayudarle a resolver este problema indicando el número de litros que debe mezclar de cada clase?

Litros del primer vino: x.

Litros del segundo vino: y.

Expresando los euros en céntimos se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1\,000 \\ 335x + 375y = 1\,000 \cdot 350 \end{array}\right\}$$

Resuélvelo.

A C T I V I D A D E S

Ejercicios para entrenarse

1 Escribe ecuaciones que reflejen las relaciones siguientes:

a) La suma de dos números es 10.
b) La diferencia de dos números es 10.
c) El producto de dos números es 24.
d) La razón de dos números es 10.
e) La diferencia de los cuadrados de dos números es 9.
f) La suma de los cuadrados de dos números es 100.
g) Un número excede a otro en 10.
h) El doble de la suma de dos números es 10.

2 Resuelve los siguientes sistemas sumando o restando ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 4x + 2y = 14 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 4 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -25 \\ 12x - 3y = 75 \end{array}\right\}$

3 Resuelve los siguientes sistemas por sustitución despejando la incógnita cuyo coeficiente es 1:

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 12 \\ x + 5y = 38 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ 20x - 3y = -4 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} 5x - y = 23 \\ 5y - 9x = 13 \end{array}\right\}$

4 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 19 \\ 5x - 2y = 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 33 \end{array}\right\}$

5 Resuelve los siguientes sistemas por reducción:

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = 7 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = -1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2} = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{4} = 5 \\ \dfrac{5x}{3} - \dfrac{y}{2} = 3 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 3 \\ x + 2y = 12 \end{array}\right\}$

6 Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6\,751x + 3\,249y = 26\,751 \\ 3\,249x + 6\,751y = 23\,249 \end{array}\right\}$$

(Aclaración: piensa antes de hacer muchas operaciones).

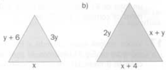
7 Halla dos números cuya suma es 14 y su diferencia 8.

8 La suma de dos números es igual a 39 y su diferencia es 11. Halla los números.

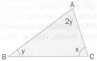
9 Halla dos números sabiendo que su suma es igual a 666 y que uno de ellos es 376 unidades mayor que el otro.

10 Encuentra los valores de x e y para que los siguientes triángulos sean equiláteros.

a) b)

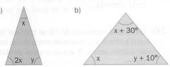


11 Se sabe que el ángulo C tiene 36° más que el ángulo B. Halla los valores de x e y.



12 Encuentra los valores de x e y para que sean isósceles los siguientes triángulos:

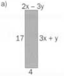
a) b)



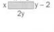
PROBLEMAS PARA APLICAR

13 Encuentra los valores de x e y en los siguientes rectángulos:

a)



b)



14 Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Dispone en total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

15 Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a 4,50 euros, y otros, a 3,60 euros, obteniendo de la venta 310,50 euros. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

16 En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Halla el número de conejos y de gallinas.

17 Varios amigos están jugando a los chinos con monedas de 5 y 25 céntimos. Al abrir las manos cuentan 8 monedas con un valor de 140 céntimos. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

18 Una persona cambia monedas de 1 céntimo por monedas de 5 céntimos sin ganar ni perder en el cambio, quedando después del mismo con 60 monedas menos. Halla el dinero que tiene.

19 La diferencia de dos números es $\frac{1}{6}$. El triple del mayor menos el doble del menor es 1. Halla dichos números.

20 Dos números suman 51. Si al primero lo dividimos entre 3 y al segundo entre 6, los cocientes se diferencian en 1. Halla el valor de dichos números.

21 El cociente de una división es 3 y el resto 5. Si el divisor disminuye en dos unidades, el cociente aumenta en una unidad y el resto nuevo es 1. Halla el dividendo y el divisor.

22 El dividendo de una división es 1 081, el cociente y el resto son iguales y el divisor es el doble del cociente. Halla el divisor.

23 Divide 473 en dos partes de modo que al dividir la mayor por la menor se obtenga 7 de cociente y 9 de resto.

24 La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añade 18, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. Halla el número primitivo.

25 Halla un número de dos cifras igual al triple del producto de ellas, sabiendo que la diferencia entre las cifras de las unidades y las decenas es 4.

26 Dos hermanos fueron a pescar. Al final del día uno dijo: «Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú». El otro le respondió: «Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú». ¿Cuántos peces tenían cada uno?

27 Un jurado está compuesto por hombres y mujeres. El número de mujeres es igual al doble de hombres menos 4. Con dos mujeres menos el jurado tendría el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Cuántos hombres y mujeres habría en el jurado?

28 En una fiesta juvenil hay chicas y chicos. Quince chicas abandonan la fiesta, quedando 2 chicos por cada chica. Entonces 45 chicos se van y quedan 5 chicas por cada chico. ¿Cuántas chicas había inicialmente en el grupo?

29 La edad de una persona es doble de la de otra. Hace 7 años la suma de las edades era igual a la edad actual de la primera. Halla las edades de las personas.

ACTIVIDADES

30 Halla las edades de dos personas, sabiendo que hace 10 años la edad de la primera era 4 veces la edad de la segunda, y dentro de 20 años la edad de la primera será solo el doble.

31 Hace 18 años la edad de una persona era el doble de la de otra; dentro de 9 años, en edad, la primera será solamente los $\frac{5}{4}$ de la segunda. Halla ambas edades.

32 Las tres cuartas partes de la edad de Susana exceden en 15 años a la de David. Hace 4 años la edad de Susana era el doble de la de David. Halla la edad de cada uno.

33 Un padre dice a su hijo: «Hoy tu edad es $\frac{1}{5}$ de la mía, y hace 7 años no era más que $\frac{1}{9}$». Halla las dos edades.

34 Hace 1 año la edad de un padre era 3 veces mayor que la del hijo, pero dentro de 13 años no tendrá más que el doble. Halla las edades del padre y del hijo.

35 Hace 5 años la edad de una persona era el triple de la de otra, y dentro de 5 años será el doble. Halla las edades de cada una de las personas.

36 Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mide 80 m y la altura es $\frac{2}{3}$ de la base.

37 Dos obreros hacen un trabajo en 3 horas. Uno de ellos lo haría sólo en 4 horas. Halla el tiempo que tardaría el otro solo.

38 Se desea mezclar vino de 5,50 euros/litro con otro de 4 euros/litro de modo que la mezcla resulte a 4,50 euros el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 300 litros de la mezcla?

39 Por la mezcla de 8 kg de café con 2 kg de torrefacto se han pagado 13,24 euros. Calcula el precio del kilogramo de café y del kilogramo de torrefacto, sabiendo que si se mezclase 1 kg de cada clase la mezcla costaría 1,82 euros.

40 Se quiere obtener un lingote de oro de 1 kg de peso y ley de 900 milésimas, fundiendo oro de 975 milésimas y oro de 875 milésimas. ¿Qué cantidad hay que fundir de cada clase?

41 Las densidades de dos líquidos, en gr/cm^3, son 0,7 y 1,3. Se mezclan para obtener un líquido de densidad 0,9. Halla la cantidad de líquido que hay que tomar de cada clase para formar una mezcla de 30 litros.

42 La diagonal de un rectángulo mide 26 cm, y el perímetro, 68 cm. Halla los lados del rectángulo.

43 Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 metros, respectivamente.

44 Calcula las dimensiones de un rectángulo conociendo su diagonal, 17 m, y su superficie, 120 m^2.

45 Halla dos números cuya suma es 14, y la de sus cuadrados, 100.

46 Halla dos números cuyo producto es 12 y tales que la suma de sus cuadrados es 25.

47 Halla dos números cuya suma es 18, y la de sus inversos, $\frac{9}{40}$.

48 Un peatón recorre 22 km en 5 horas, pero los 10 primeros kilómetros va a una velocidad superior en 1 km/h a la del resto. Calcula la velocidad que llevó en el recorrido.

49 De los tres caños que afluyen a un estanque, uno puede llenarlo solo en 36 horas; otro, en 30 horas, y el tercero, en 20 horas. Halla el tiempo que tardarán en llenarlo juntos.

A C T I V I D A D E S

Cuestiones para aclararse

50 Los números 2 y 3 son soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 13 \\ -x + y = 1 \end{array}\right\}$$

¿Es correcta esta forma de expresar la solución del sistema?

51 Razona, sin resolverlo, si el sistema $x + 2y = 4$, $2x + 4y = 4$ es compatible o no.

52 Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más incógnitas que ecuaciones, ¿es necesariamente compatible? Razona la respuesta con un ejemplo.

53 Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede tener exactamente dos soluciones? Si la respuesta es afirmativa, da un ejemplo; en caso contrario, razona por qué no.

54 En un sistema de dos ecuaciones lineales los coeficientes y el término independiente de la primera son proporcionales a los correspondientes de la segunda. ¿Cómo es el sistema? Razona la contestación con un ejemplo.

55 En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 80 cabezas y 204 patas. Sin resolver el problema, ¿puede afirmarse que no todos son conejos ni todas son gallinas? ¿Por qué?

Actividades para profundizar

56 Si se invierten los dos dígitos de la edad de Covadonga se obtiene un número que es exactamente una unidad menor que la mitad de la edad de Covadonga. ¿Cuántos años tiene Covadonga?

57 Un examen consta de 25 preguntas. Las preguntas contestadas correctamente son puntuadas con un 5, las preguntas contestadas erróneamente con -4 puntos y por cada pregunta no contestada se descuentan 3 puntos. Un estudiante saca 64 puntos. ¿Cuántas respuestas fueron correctas, erróneas y en blanco?

58 La razón de dos números es $\frac{3}{4}$. Si se suman 10 unidades a cada uno de ellos la razón de los nuevos números es $\frac{11}{14}$. Halla los números.

59 Las edades de tres niños sumadas dos a dos dan 6, 8 y 12, respectivamente. Halla las edades.

60 Una madre y sus dos hijos tienen en conjunto 60 años. Halla la edad de cada uno sabiendo que el hijo mayor tiene 3 veces la edad del menor, y que la madre tiene el doble de la suma de las edades de los hijos.

61 Halla las edades de un abuelo, un padre y un hijo sabiendo que en la actualidad la edad del abuelo es doble de la edad del padre, la de éste doble de la del hijo, y que hace 1 año sus edades sumaban 137 años.

62 Halla un número de tres cifras divisible por 11, tal que la suma de sus cifras sea 10, y la diferencia entre dicho número y el que resulta invirtiendo el orden de sus cifras sea 297.

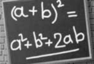
63 Al extraer la raíz cuadrada de un número se obtiene de resto 2. Si al número se le suman 27 unidades, la raíz cuadrada de la suma aumenta en una unidad y el resto es 6. Halla dicho número.

64 En una proporción, el producto de los medios vale 96 y su suma 20. Halla los cuatro términos de la proporción sabiendo que los extremos de la misma suman 35.

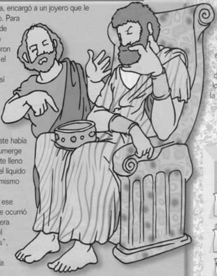
65 En una proporción continua (los términos medios son iguales) el término medio vale 8. Sabiendo que la suma de los 4 términos es 50, escribe la proporción.

MURAL DE

MATEMÁTICAS



EL TIMO DE LA CORONA



Hieron, el rey de Siracusa, encargó a un joyero que le hiciera una corona de oro. Para ello le dio 7 465 gramos de ese metal precioso. Pero cuando la recibió le entraron dudas: ¿no habría usado el artesano plata mezclada entre el oro para ganar así más dinero? ¿Cómo podría comprobarlo sin necesidad de romper la corona?

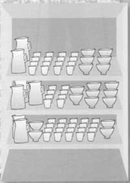
Le encargó el asunto a su amigo Arquímedes. Este había comprobado que si se sumerge un cuerpo en un recipiente lleno de agua hasta el borde, el líquido que se derrama tiene el mismo volumen que el cuerpo sumergido. Partiendo de ese descubrimiento, que se le ocurrió un día al entrar en la bañera y que se conoce como el "principio de Arquímedes", dio con una forma de solucionar el enigma de la corona.

Él ya sabía que al sumergir un kilo de oro se derramaban 52 cm^3 de agua, y que al meter uno de plata, 95 cm^3. Dicho de otra forma, la densidad del oro es $1000/52 = 19{,}23$ g/cm^3, y la de la plata, $1000/95 = 10{,}52$ g/cm^3.

Con esos datos y un par de cálculos le bastó para decirle al rey: "Majestad, el joyero se ha quedado con una parte del oro que le dio para hacer la corona". ¿Cómo lo hizo?

UN ARMARIO CON TRUCO

Fíjate en los anaqueles de este armario. En cada uno de ellos hay jarras, vasos y cuencos. Si te decimos que la capacidad total de los recipientes de cada anaquel es la misma..., ¿sabrías cuántos vasos se pueden llenar con una jarra? ¿Y a cuántos vasos equivale un cuenco?



ECUACIONES FARAÓNICAS

Parece ser que a los egipcios de los tiempos de los faraones (hace unos 4 000 años) ya les interesaban los problemas de ecuaciones.

En aquella época no existía el papel, así que para dejar constancia de sus ideas por escrito usaban una especie de hojas formadas por finas tiras de una planta llamada papiro.

En el "papiro de Balin", que se cree que fue escrito 2 000 años antes de Cristo, aparecen problemas que parecen implicar sistemas de ecuaciones no lineales.

MATEMÁTICAS CON LOS PIES EN EL SUELO

Nikolai Ivanovich Lobachevsky, un famoso matemático ruso que vivió en el siglo XIX, decía que "no hay ninguna rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real".

Proporcionalidad directa e inversa

10

Un grupo de cuatro amigos deciden ir a esquiar. Por el alquiler de un microbús de hasta 20 plazas les cobran 360 euros. De manera que si solo van los cuatro amigos les toca pagar a cada uno 90 euros. Como es bastante dinero, deciden buscar más amigos para pagar menos dinero. ¿Cuánto pagarán si viajan 9 amigos? ¿Y si viajan 18?

En esta unidad vas a ver la forma de resolver situaciones como esta que están asociadas a la idea de proporcionalidad, tanto directa como inversa.

1 Proporcionalidad directa. Constante de proporcionalidad directa

Relaciones proporcionales

Para hacer 30 litros de limonada usamos 10 kg de limones.

Para hacer 60 litros (el doble) usamos 20 kg (el doble).

Para hacer 90 litros (el triple), usamos...

Formamos la tabla siguiente:

Limonada (litros)	30	60	90	...
Limones (kilogramos)	10	20	L	...

De la relación $\frac{30}{10} = 3;\ \frac{60}{20} = 3;\ \frac{90}{L} = 3$ se deduce: L = 30 kg

Esta es una relación entre **magnitudes proporcionales**.

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente o razón de las cantidades correspondientes es constante. Este cociente se llama **constante de proporcionalidad, k.**

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = ... = k$$

Relaciones no proporcionales

Una madre tiene 30 años, y su hijo, 10 años. Cuando la madre tenga 60 años (el doble), el hijo tendrá 40 años (no es el doble).

Esta es una relación entre magnitudes no proporcionales.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Luis y Carlos llegan a Miami. Luis cambia 5 000 euros y le dan 2 500 dólares. A Carlos le dan 9 000 dólares. ¿Cuántos euros cambió Carlos? ¿Cuál es el cambio euro-dólar?

Formamos una tabla:

Dólares	D	2 500	9 000
Euros	E	5 000	x

Buscamos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{2\,500}{5\,000} = 0{,}5\,;\ \frac{9\,000}{x} = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 18\,000 \text{ euros}$$

Si D es el número de dólares y E el de euros:

$$\frac{D}{E} = 0{,}5 \text{ de donde } E = 2D$$

MUY RÁPIDO

En una proporción conocemos A, B, C y queremos hallar X:

$\frac{A}{B} = \frac{C}{X}$; como $\frac{A}{B} = K$

$\frac{C}{X} = K$; luego $X = \frac{C}{K}$

MUY FÁCIL

La regla de tres.

En una proporción conocemos A, B, C y queremos hallar X:

$\left.\begin{array}{l} A \text{ ---- } B \\ C \text{ ---- } X \end{array}\right\} A \cdot X = B \cdot C$

Así: $X = \frac{B \cdot C}{A}$

MUY ÚTIL

Los productos cruzados.

En una proporción conocemos A, B, C y queremos hallar X:

$\frac{A}{B} = \frac{C}{X} \Rightarrow A \cdot X = B \cdot C$

Así: $X = \frac{B \cdot C}{A}$

2 Porcentajes y proporcionalidad

La proporcionalidad directa se expresa a menudo en porcentajes o «tantos por ciento». Veamos algunos ejemplos:

Si un jugador lanza 10 veces a canasta y encesta 4, ¿cuál es el porcentaje de encestes?

Lanzamientos	10	100
Canastas	4	x

$$\frac{10}{4} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 40$$

De 100 lanzamientos encestaría 40, es el 40 %, o un porcentaje del 40 %.

Un titular de prensa dice: «Tres de cada cinco españoles no beben alcohol». ¿Qué porcentaje de españoles no beben alcohol?

Formamos una tabla:

Españoles preguntados	5	$\frac{5}{5} = \frac{100}{100} = \frac{10}{10} = \frac{1}{1}$
No beben alcohol	3	$\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{0,6}{1}$

Lo leeríamos así:

El 60 por 100 de los españoles no bebe alcohol; o 6 de cada 10 españoles no bebe alcohol; o, el 0,6 por 1 de los españoles no bebe alcohol.

Es importante recordar que:

> El tanto por 1 se obtiene expresando la razón en forma decimal.
> El tanto por 100 se obtiene multiplicando por 100 el tanto por 1.

De una cantidad A se quiere calcular su 20 %; supongamos que esta cantidad sea P, entonces:

$$\frac{20}{100} = \frac{P}{A}; \text{ de aquí } 20 \cdot A = 100 \cdot P \Rightarrow P = A \cdot \frac{20}{100} = A \cdot 0,20$$

> Para calcular el 20 % de una cantidad basta multiplicar dicha cantidad por 0,20. Análogamente se calculan otros porcentajes.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Unos análisis hechos en una granja de 7 200 animales han dado un 24 % de animales enfermos. Se emplea una dosis de vitamina A como tratamiento en 2 de cada 3 animales. ¿Cuántas dosis de vitamina A se necesitan?**

Animales enfermos: $7\,200 \cdot 0,24 = 1\,728$

Para el tratamiento, planteamos la siguiente proporción:

$\frac{2}{3} = \frac{x}{1\,728}$, luego $x = 1\,152$; necesitaríamos 1 152 dosis de vitamina A.

3 Repartos proporcionales directos

Si dos magnitudes x e y son proporcionales, se cumple $\frac{y}{x} = k$, o $y = k \cdot x$ (k es la constante de proporcionalidad). Entonces en una tabla:

Magnitud x	a	b	c	...
Magnitud y	$a' = k \cdot a$	$b' = k \cdot b$	$c' = k \cdot c$	...

Así tendremos:

$a' = k \cdot a$; $b' = k \cdot b$; $c' = k \cdot c$; ...

y la suma:

$a' + b' + c' + ... = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c + ... = k \cdot (a + b + c + ...)$

de donde:

$$k = \frac{a' + b' + c' + ...}{a + b + c + ...}$$

Veamos un ejemplo:

Un puente ha costado 3 150 000 euros, y lo deben pagar tres ayuntamientos proporcionalmente a su número de habitantes, que son 800, 625 y 575. ¿Cuánto pagará cada uno?

Si k es la constante de proporcionalidad:

$$\left.\begin{array}{l}\text{El 1.º pagará } 800 \cdot k \\ \text{El 2.º pagará } 625 \cdot k \\ \text{El 3.º pagará } 575 \cdot k\end{array}\right\} \text{Luego: } 800 \cdot k + 625 \cdot k + 575 \cdot k = 3\,150\,000$$

Así: $2\,000\ k = 3\,150\,000 \Rightarrow k = 1\,575$ euros.

De modo que:

— El primer ayuntamiento paga: $800 \cdot 1\,575 = 1\,260\,000$ euros.

— El segundo ayuntamiento paga: $625 \cdot 1\,575 = 984\,375$ euros.

— El tercer ayuntamiento paga: $575 \cdot 1\,575 = 905\,625$ euros.

La proporcionalidad se puede utilizar también en varios campos: en física, para estudiar movimientos uniformes; en geografía, con escalas de mapas; en sociología, para medir opinión...

PORCENTAJES Y COMPARACIÓN

Los porcentajes son muy útiles para comparar.

Una máquina A fabrica 280 tornillos y salen 14 defectuosos. Otra máquina B fabrica 275 tornillos y salen 11 defectuosos. ¿Cuál de las dos máquinas trabaja mejor?

A: $\frac{14}{280} = 0{,}05$, *que es el tanto por uno, luego hay 5 % de defectuosos.*

B: $\frac{11}{275} = 0{,}04$, *que es, análogamente, el 4 % de defectuosos, luego trabaja mejor la máquina B.*

LOS PORCENTAJES DE AUMENTO

El IVA es un impuesto que aumenta el precio de las cosas.

Si una blusa vale 60 euros y tiene además un 16 % de IVA, tendremos:

IVA $= 60 \cdot 0{,}16 = 9{,}60$

BLUSA + IVA $= 60 + 9{,}60 = 69{,}60$, *pero también directamente:*

BLUSA + IVA $= 60 \cdot 1{,}16 = 69{,}60$

EJERCICIOS RESUELTOS

3 Una finca ocupa en un plano, con escala 1 : 50 000, una extensión de 30 dm². Se ha comprado por 1,8 millones de euros. ¿A qué precio se ha pagado el metro cuadrado?

Para hallar su superficie real, planteamos una proporción:

$$\frac{1}{50\,000} = \frac{30}{x};\ x = \frac{30 \cdot 50\,000}{1} = 1\,500\,000\ dm^2 = 15\,000\ m^2$$

Para calcular el precio del metro cuadrado, planteamos otra proporción:

$$\frac{15\,000}{1\,800\,000} = \frac{1}{x};\ x = \frac{1\,800\,000}{15\,000} = 120 \text{ euros el metro cuadrado}$$

4 Porcentajes encadenados

DISMINUCIONES

Si a una cantidad C se le aplica un descuento del r %, el precio final será:

$$C\left(1 - \frac{r}{100}\right)$$

INCREMENTOS

Si a una cantidad C se le aplica un incremento del r %, el precio final será:

$$C\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Recordemos el cálculo de porcentajes:

Un televisor cuesta 450 €. En rebajas hacen un descuento del 10 %, ¿cuál será el precio del televisor?

Un descuento del 10 % quiere decir que de cada 100 € descuentan 10.

Por tanto, en 450 € descontarán $\frac{450 \cdot 10}{100} = 45$ €

y el precio a pagar será: $450 - 45 = 405$ €

De otro modo, el precio a pagar es: $450 \cdot (1 - 0{,}10) = 450 \cdot 0{,}90 = 405$ €, es decir, el precio inicial, 450, por el tanto por uno, 0,90.

Un ordenador cuesta 900 €, más un 16 % de IVA. ¿Cuál es su precio final? En este caso debemos añadir por cada 100 € un impuesto de 16 €.

Por tanto, $900 \cdot \frac{16}{100} = 144$ €

A 900 € tendremos que añadir el valor del IVA que es igual a 144 € y el precio a pagar será: $900 + 144 = 1\,044$ €

De otro modo, el precio a pagar es: $900 \cdot (1 + 0{,}16) = 1\,044$ €, es decir, el precio inicial, 900, por el tanto por uno, 1,16.

El precio de una bicicleta es 150 €. En rebajas hacen un descuento del 25 % y luego, como siempre, hay que pagar el 16 % de IVA. ¿Cuánto habrá que pagar?

Precio con descuento: $150 \cdot (1 - 0{,}25) = 150 \cdot 0{,}75 = 112{,}50$ €

Añadiendo el impuesto: $112{,}5 \cdot (1 + 0{,}16) = 112{,}5 \cdot 1{,}16 = 130{,}50$ €

Por tanto, el precio final de la bicicleta será el precio inicial, 150, por el tanto por uno de descuento, 0,75, y por el tanto por uno de subida, 1,16.

Para calcular dos o más porcentajes encadenados sobre una misma cantidad se pasan a tantos por 1 y se aplican sucesivamente.

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Los productos de cierta empresa subieron un 10 % en 1999 y un 12 % en 2000, y bajaron un 4 % en 2001. ¿Cuál fue el porcentaje de variación de los precios en esos tres años?**

Tomamos 100 como valor inicial para calcular los porcentajes.

Valor final de 100 euros: $100 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}12 \cdot 0{,}96 = 118{,}272$

Por tanto, ha habido una variación positiva del 18,272 %.

5 **Una tienda bajó de precio unas zapatillas de deporte en un 25 %, luego las subió un 50 % y, finalmente, volvió a bajarlas un 25 %. ¿Cuál es el porcentaje de variación del precio de las zapatillas?**

Tomamos 100 como valor inicial de las zapatillas para calcular la variación de los porcentajes.

Valor final de 100 euros: $100 \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}50 \cdot 0{,}75 = 84{,}375$

Variación respecto a los 100 euros iniciales: $84{,}375 - 100 = -15{,}625$

Porcentaje de variación: $-15{,}625$ %

5 Interés simple

Alberto, navegando por Internet, ha entrado en la dirección de un banco en la red que anuncia un incremento del 6 % por el capital que se ingrese y se mantenga durante un año. Si Alberto ingresa 400 € el 1 de enero de 2002, ¿cuántos euros recibe el 1 de enero de 2003?

El capital inicial es: 400 €

El interés producido al 6 % es: $400 \cdot \frac{6}{100} = 24$ €

El capital final el 1 de enero de 2003 es: $400 + 24 = 424$ €

Durante cada año ese capital ingresado produce 24 €; si lo tuviera ingresado 3 años, ¿cuánto dinero recibirá el 1 de enero de 2005?

Cada año recibe: 24 € de interés.

En 3 años recibirá: $3 \cdot 24$ € de interés.

Y el capital final será: $400 + 3 \cdot 24 = 472$ €

Se observa que el interés es una magnitud que depende del capital inicial, el tanto por ciento y el tiempo.

Supongamos que se ingresa un capital inicial de c euros al r %, durante t años. ¿Qué intereses producirá al final del período?

Como 1 euro produce en 1 año $\frac{r}{100}$ euros

c euros producen en 1 año $\frac{c \cdot r}{100}$ euros

c euros producen en t años $\frac{c \cdot r \cdot t}{100}$ euros

Así pues el interés producido al final del período será $i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$

A este interés se llama **interés simple**.

Interés simple es el beneficio que produce un capital fijo durante un tiempo determinado.

El interés simple que produce un capital c, colocado al r % durante t años, es:

$$i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$$

Ejercicios resueltos

6 **En la expresión del interés simple $i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$, despeja c, r y t.**

$$c = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t} \qquad r = \frac{100 \cdot i}{c \cdot t} \qquad t = \frac{100 \cdot i}{c \cdot r}$$

7 **Se ingresan 1 250 € al 6,5 % durante 5 años.**

a) ¿Qué interés simple se obtiene al final del período?

b) ¿Cuál es el capital final?

a) $i = \frac{1\,250 \cdot 6{,}5 \cdot 5}{100} = 406{,}25$ €

b) $c = 1\,250 + 406{,}25 = 1\,656{,}25$ €

MUY IMPORTANTE

*El **interés simple** es el beneficio que produce un capital fijo durante un tiempo determinado.*

En la práctica se usa otro tipo de interés que se denomina compuesto y que se estudia en cursos superiores.

*El **interés compuesto** es el beneficio que produce un capital junto con sus intereses que se añaden a dicho capital al final de cada período de tiempo, para producir nuevos beneficios durante el período que se fije.*

DÍAS EN LUGAR DE AÑOS

Si en lugar de colocar un capital c al r % durante t años lo colocamos durante d días, teniendo en cuenta que el año comercial se supone que tiene 360 días, resulta:

$$i = \frac{c \cdot r}{100} \cdot \frac{d}{360}$$

6 Proporcionalidad inversa. Constante de proporcionalidad inversa

Se reparte un premio de quinielas por valor de 7,2 millones. Si hay un único acertante, le tocan 7,2 millones; si hay dos (el doble), les tocan 3,6 millones (la mitad) a cada uno; si hay tres (el triple), les tocan 2,4 millones (la tercera parte) a cada uno; si hay cuatro, les tocan...

N.º de acertantes	1	2	3	4
Premio en millones	7,2	3,6	2,4	x

Observa que:

$1 \cdot 7{,}2 = 2 \cdot 3{,}6 = 3 \cdot 2{,}4 = 4 \cdot x = ...$, se deduce $x = 1{,}8$ millones.

Esta es una relación entre **magnitudes inversamente proporcionales.**

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto de las cantidades correspondientes es constante. Este producto se llama **constante de proporcionalidad inversa.**

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = ... = k$$

EJERCICIOS RESUELTOS

8 **Si 6 pintores necesitan 54 días para pintar un edificio, ¿en cuánto tiempo lo pintarían 18 pintores?**

Buscamos la constante: $6 \cdot 54 = 324$

18 pintores tardan x días: $18 \cdot x = 324$, luego $x = 18$ días.

9 **Una fábrica de bombones necesita, para envasar su producción diaria con cajas de $\frac{1}{2}$ kg, 3 600 cajas. ¿Cuántas cajas necesitará si quiere que sean de $\frac{1}{4}$ kg? ¿Y si quiere que sean de 300 g?**

Buscamos la constante: $3\,600 \cdot \frac{1}{2} = 1\,800$

Para cajas de $\frac{1}{4}$ kg: $x \cdot \frac{1}{4} = 1\,800$, luego $x = 7\,200$ cajas.

Si son cajas de 300 g: $y \cdot 0{,}3 = 1\,800$, luego $y = 6\,000$ cajas.

10 **Para abonar un campo se han necesitado 42 300 kg de un cierto abono que contenía 25 % de nitrógeno. ¿Cuántos kilogramos se necesitan de otro abono que contenga 36 % de nitrógeno para que el campo reciba la misma cantidad de nitrógeno?**

Buscamos la constante: $42\,300 \cdot 25 = 1\,057\,500$

Para el abono al 36 %: $x \cdot 36 = 1\,057\,500$, luego $x = 29\,375$ kg.

7 Repartos proporcionales inversos

Si dos magnitudes x e y son inversamente proporcionales, se cumple $x \cdot y = k$ (k, constante de proporcionalidad). Pero se cumple también $x : \frac{1}{y} = k$, es decir, si x e y son inversamente proporcionales, x y $\frac{1}{y}$ son directamente proporcionales. Así que hacer un reparto inversamente proporcional a M, N, P es hacer un reparto directamente proporcional a $\frac{1}{M}, \frac{1}{N}, \frac{1}{P}$ (los inversos). Veamos un ejemplo:

Se reparte una gratificación de 1 080 euros entre los pastores de una ganadería, en partes inversamente proporcionales a las ovejas que han perdido. El primer pastor perdió solo una oveja; el segundo perdió tres ovejas, y el tercero seis ovejas. ¿Cuánto le tocará a cada uno?

Si k es la constante de proporcionalidad:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Al primer pastor le corresponderá: } \frac{1}{1} \cdot k \\ \text{Al segundo pastor le corresponderá: } \frac{1}{3} \cdot k \\ \text{Al tercer pastor le corresponderá: } \frac{1}{6} \cdot k \end{array}\right\} \text{ Luego: } k + \frac{k}{3} + \frac{k}{6} = 1\,080$$

Así: $\frac{9k}{6} = 1\,080$, luego $k = 720$

Entonces:

Al primer pastor le corresponden: $1 \cdot 720 = 720$ euros.

Al segundo pastor le corresponden: $\frac{1}{3} \cdot 720 = 240$ euros.

Al tercer pastor le corresponden: $\frac{1}{6} \cdot 720 = 120$ euros.

EJERCICIOS RESUELTOS

11 Un padre decide repartir su herencia de 330 000 euros entre sus tres hijos, dando proporcionalmente más dinero a los que menos tienen. El mayor tiene 20 000, el mediano tiene 40 000 y el menor tiene 5 000. ¿Cuánto le toca a cada uno?

- Es un reparto inverso a 2, 4 y $\frac{1}{2}$, luego directo a $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, 2.

Si es k la constante de proporcionalidad:

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + 2k = 330\,000 \Rightarrow \frac{11k}{4} = 330\,000 \Rightarrow k = 120\,000$$

Entonces:

Al mayor le corresponden: $\frac{1}{2} \cdot 120\,000 = 60\,000$ euros.

Al mediano le corresponden: $\frac{1}{4} \cdot 120\,000 = 30\,000$ euros.

Al pequeño le corresponden: $2 \cdot 120\,000 = 240\,000$ euros.

UNA IDEA FUNDAMENTAL

Es proporcionalidad inversa si a doble cantidad de una magnitud corresponde la mitad de cantidad de la otra magnitud, al triple le corresponde un tercio, etc.

8 Proporcionalidad compuesta

Proporcionalidad compuesta directa

Un hotel cobra a 4 personas por 5 días de alojamiento 1 200 euros. ¿Cuánto cobrará a 6 personas por 10 días de alojamiento?

4 personas en 5 días pagan 1 200 euros.

1 persona en 5 días pagará $\frac{1\,200}{4} = 300$ euros.

1 persona en 1 día pagará $\frac{300}{5} = 60$ euros.

6 personas en 1 día pagarán $60 \cdot 6 = 360$ euros.

6 personas en 10 días pagarán $360 \cdot 10 = 3\,600$ euros.

Por lo que el hotel les cobrará: 3 600 euros.

Proporcionalidad compuesta inversa

Para realizar una auditoría a una empresa se han necesitado 6 economistas trabajando 12 horas diarias durante 5 días. ¿Cuántos días necesitarán 10 economistas trabajando 6 horas diarias para hacer una auditoría a una empresa igual?

6 economistas trabajando 12 horas necesitan 5 días.

1 economista trabajando 12 horas necesita $5 \cdot 6 = 30$ días.

1 economista trabajando 1 hora necesita $30 \cdot 12 = 360$ días.

10 economistas trabajando 1 hora necesitarán $\frac{360}{10} = 36$ días.

10 economistas trabajando 6 horas necesitarán $\frac{36}{6} = 6$ días.

Luego la auditoría se realizaría en 6 días.

RECUERDA

DOBLE ⇒ DOBLE
TRIPLE ⇒ TRIPLE
Proporcionalidad directa.

DOBLE ⇒ MITAD
TRIPLE ⇒ TERCERA PARTE
Proporcionalidad inversa.

Proporcionalidad compuesta directa-inversa

Un peregrino, caminando 10 horas diarias durante 24 días, recorre 720 km. ¿Cuántos días necesitará para recorrer 432 km, caminando 8 horas diarias?

720 km, caminando 10 horas, los hace en 24 días.

1 km, caminando 10 horas, lo hace en $\frac{24}{720} = \frac{1}{30}$ de día.

1 km, caminando 1 hora, lo hace en $\frac{1}{30} \cdot 10 = \frac{1}{3}$ de día.

432 km, caminando 1 hora, los hace en $432 \cdot \frac{1}{3} = 144$ días.

432 km, caminando 8 horas, los hace en $\frac{144}{8} = 18$ días.

Con lo que necesitará 18 días para hacer el recorrido.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Leer y comprender el enunciado.
- Pensar una estrategia. ¿Qué hacer?
- Ejecutar la estrategia.
- Comprobar el resultado.

PROBLEMA

Un jugador de baloncesto ha obtenido en sus lanzamientos de dos puntos un porcentaje de acierto del 80 %. ¿Cuál será el mínimo número de lanzamientos que debe hacer para obtener ese porcentaje?

LEER Y COMPRENDER EL ENUNCIADO

- Se entiende que nos piden un número natural (no se puede lanzar a canasta 1,2 veces) y se estima que debe ser menor que 100, ya que es muy difícil lanzar 100 veces en un partido.

LA ESTRATEGIA

- Se intenta simplificar el problema; se busca una relación de números que dé el 80 %.

EJECUTAR LA ESTRATEGIA

- Con una relación del 80 % $= \frac{80}{100}$, habría hecho 100 lanzamientos y 80 canastas.

¿Se puede simplificar manteniendo la proporción y, consecuentemente, el porcentaje? Veamos que sí:

$$\frac{80}{100} = \frac{40}{50} = \frac{20}{25} \ldots$$

Es decir, lanza 50 veces y encesta 40, lanza 25 con 20 canastas, etc.

Así, el número mínimo de lanzamientos se obtendría cuando la fracción del 80 % sea irreducible:

$$\frac{80}{100} = \frac{40}{50} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

de donde lanza 5 veces y encesta 4.

COMPROBAR EL RESULTADO

- Si lanza 5 tiros y obtiene 4 canastas, se obtiene el tanto por uno $\frac{4}{5} = 0{,}8$ (0,8 por 1), que al multiplicar por 100 da el 80 %, y además es fracción irreducible (no se puede simplificar más), lo que comprueba la estrategia.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 La constante de proporcionalidad directa entre dos números es 0,75. El mayor es 20. Calcula el menor.

2 La constante de proporcionalidad entre dos números es 1,25. El mayor es 45. Calcula el menor.

3 Se sabe que los dos quinceavos de la remolacha se convierten en azúcar. ¿Cuánta remolacha hay que adquirir para obtener 2 376 kg de azúcar?

4 Calcula el tanto por ciento de alcohol en una mezcla de 3 litros de alcohol y 5 litros de agua.

5 Luis hace limonada con 12 litros de agua y 8 litros de zumo de limón. ¿Cuál es el porcentaje de zumo de limón que hay en la limonada?

6 En una granja, la peste porcina mata al 18 % de los cerdos, quedando 164. ¿Cuántos han muerto?

7 El agua de un depósito se extrae en 200 veces con un bidón de 15 litros. Calcula en cuántas veces se extraería con un bidón de 25 litros.

8 Realizamos un trabajo en 2 meses y somos 12 personas. Necesitamos hacerlo en solo 18 días. ¿Cuántas personas debemos contratar?

9 Tres niños comen un pastel en 16 minutos. ¿En cuánto tiempo lo comerían cuatro niños?

10 Una ganadera tiene pienso para alimentar 320 vacas durante 45 días. Pero debe darles de comer 60 días. Vende las que no puede alimentar. ¿Cuántas vacas vende?

11 Reparte 4 475 proporcionalmente a 5, 7 y 13.

12 Reparte 7 875 en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 6.

13 En un anuncio de rebajas, ves:
Pijamas: Antes 15,75, ahora 11,95.
Zapatos: Antes 39,90, ahora 29,95.
Se quiere saber:

a) ¿Están rebajados estos artículos proporcionalmente?
b) Si no es así, ¿cuál lo está más?

PROBLEMAS PARA APLICAR

14 Un recién nacido aumenta en el primer mes la cuarta parte de su peso y en el segundo mes gana las dos terceras partes del aumento del primero. Al fin del segundo mes pesa 5 kg y 100 g. ¿Cuánto pesó al nacer?

15 Un cultivo de bacterias de un laboratorio tiene 120 000 bacterias y adquiere una enfermedad que produce la muerte del 16 % de la población. Tratadas las bacterias supervivientes con un producto muy eficaz se consigue aumentar la población en un 14 %. ¿Cuántas bacterias forman la población finalmente?

16 Se compra un coche de 36 000 euros, pagando los $\frac{2}{5}$ al contado y el resto con un aumento del 18 % en mensualidades durante dos años. ¿Cuánto corresponde pagar cada mes?

17 Dos ganaderos alquilan un terreno para pasto de sus dos manadas por 3 500 euros. La manada del primero la componen 40 vacas, y la del segundo, 300 ovejas. ¿Cuánto ha de pagar cada uno si una vaca come como 10 ovejas?

18 Los ingredientes de una receta de galletas son: 1 vaso de mantequilla; 3 huevos; 1,5 vaso de azúcar; 2 vasos de harina. Solo tenemos 2 huevos. ¿Cómo debemos modificar los restantes ingredientes de la receta para poder hacer galletas?

A C T I V I D A D E S

19 La producción de cebollas y zanahorias en España está en una relación de 8 a 5. Si la producción de cebollas disminuye en un 15 % y la de zanahorias aumenta en un 20 %, ¿en qué relación queda la producción? (Expresa la relación en números enteros.)

20 Dos leñadores aceptan cortar madera por 1 500 euros. Uno, con tres ayudantes, trabajó 5 días; el otro, con 4 ayudantes, trabajó 6 días. ¿Qué dinero debe recibir cada leñador?

21 Entre tres pintores han pintado una casa y han cobrado 4 160 euros. El primero ha trabajado 15 días; el segundo, 12 días, y el tercero, 25 días. ¿Cuánto dinero tiene que recibir cada uno?

22 María, Paloma y Sara han cobrado por un trabajo 344 euros. María ha trabajado 7 horas; Paloma, 5 horas, y Sara, 4 horas. ¿Qué le corresponde cobrar a cada una, proporcionalmente a su trabajo?

23 En el instituto hay en tercero de ESO 210 alumnos y se espera que pasen a cuarto de ESO 170. También hay 160 alumnos en primero de Bachillerato y se espera que pasen a segundo de Bachillerato 130. ¿En qué curso, tercero o primero, se espera un mejor resultado?

24 Una excursión tiene una relación chicos-chicas de 5 a 3. Se añaden 3 chicos más y la relación pasa a ser 2 a 1. ¿Cuántas personas hay en la excursión?

25 Has comprado una impresora que cuesta 359 euros, pero como tienes que pagar el IVA, al final pagas 416,44 euros. ¿Qué tanto por ciento de IVA has pagado?

26 En una prueba ciclista se reparten 16 650 euros entre los tres primeros corredores, de modo inversamente proporcional al tiempo que han tardado en llegar. El primero tarda 12 minutos; el segundo, 15 minutos, y el tercero, 18 minutos. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

27 Un padre reparte un premio de lotería de 9 300 euros en proporción inversa a las edades de sus hijos, que son 6, 8, 12 y 18 años. Halla lo que corresponde a cada hijo.

28 Un empresario reparte una paga de beneficios de 990 euros entre sus tres empleados, de forma inversamente proporcional a los días que faltaron en el año. El empleado A faltó 3 días; el B, 4 días, y el C, 6 días. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

29 Se reparte un número N en partes inversamente proporcionales a 4, 5 y 9. La parte correspondiente a 4 es 900. ¿Qué les corresponde a los otros dos números y qué número es N?

30 Un capital de 7 250 € se ingresa a un interés simple del 5,25 % durante un período de 3 años.

a) ¿Qué intereses se obtienen al final del período?

b) ¿Cuál es el capital final?

31 Un grifo abierto 9 horas durante 8 días ha arrojado 5 400 litros. ¿Cuántos litros arrojará durante 18 días a 8 horas diarias?

32 Una persona leyendo 4 horas diarias, a razón de 15 páginas por hora, tarda en leer un libro 10 días. Si leyendo a razón de 10 páginas por hora tardase 20 días, ¿cuántas horas diarias leería?

33 Un capital de 4 300 € se ingresa a interés simple a un determinado tanto por ciento durante 4 años. Al final del período se obtiene un capital de 5 117 €. ¿Cuál fue el tanto por ciento aplicado?

34 Ocho bombillas iguales, encendidas durante 4 horas diarias, han consumido en 30 días 48 kWh. ¿Cuánto consumirán 6 bombillas iguales a las anteriores, encendidas 3 horas diarias, durante 20 días?

ACTIVIDADES

35 Transportar 720 cajas de libros a 240 km cuesta 4 320 euros. ¿Cuántas cajas iguales se han transportado a 300 km si hemos pagado 6 187,50 euros?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

36 Halla la suma del 40 % de $\frac{1}{4}$ y del 50 % de $\frac{1}{5}$.

37 Un apartamento está valorado en 80 000 euros. Está previsto que se revalorice su precio en un 5 % por año. ¿Cuánto valdrá dentro de 3 años?

38 Si el 150 % de cierto número es 300, ¿cuál es el 80 % de ese número?

39 El 12 % de los estudiantes del instituto al que va Carlos son de tercero de ESO, y Luis va a otro en el que el 17 % de los estudiantes son de tercero de ESO. El instituto de Carlos tiene 950 alumnos, y el de Luis, 900. ¿Cuál es el porcentaje de alumnos que hay en tercero de ESO entre los dos institutos? ¿Será suma de los porcentajes de tercero de ESO que hay en cada instituto?

40 ¿Quién es mayor, el 20 % del 50 % de 80 o el 200 % del 5 % de 50?

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

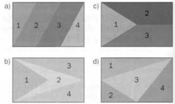
41 Representa gráficamente la relación que existe entre todos los números cuyo producto es 36. ¿Es una relación proporcional? ¿De qué tipo?

42 Un hombre ha segado $\frac{5}{8}$ de un terreno, y su hijo, $\frac{1}{3}$ de ese terreno. El hombre necesita 2 horas y 24 minutos para segar lo que le falta. ¿En qué tiempo hubiera segado solo todo el terreno?

43 Un librero ha ganado 1 968 euros vendiendo 82 ejemplares de una obra, la mitad al precio marcado por catálogo y la otra mitad con una rebaja del 10 %. El editor le da una comisión por libro del 25 % sobre el precio del catálogo. Halla el precio marcado en el catálogo.

44 Para fabricar 100 kg de pan se necesitan 40 kg de agua, $\frac{1}{2}$ kg de levadura, $\frac{3}{4}$ kg de sal y el resto de harina. En la cocción la masa pierde el 15 % del peso. ¿Cuántos kilogramos de harina hay que emplear para obtener 500 kg de pan?

45 ¿Qué porcentaje de rectángulo ocupa cada parte coloreada?



46 Durante la primera cuarta parte de la liga, un equipo de fútbol ha ganado el 40 % de los puntos posibles. ¿Qué porcentaje de puntos debe ganar en las tres cuartas partes restantes para que al finalizar la liga tenga el 70 % de los puntos posibles?

47 En una clase, el 50 % de los estudiantes lleva gafas. El 30 % es rubio, y el 10 % es rubio y lleva gafas. ¿Cuántos estudiantes no son rubios y no llevan gafas?

48 En las olimpiadas de 1948, Olga Gyarmati saltó 5,40 m en longitud y ganó la medalla de oro. En las olimpiadas de 1988, 40 años después, Jackie Joyner saltó 7,20 m para ganar la medalla de oro. Si el porcentaje de aumento siguiera manteniéndose, ¿qué habría que saltar para ganar la medalla de oro en longitud en las olimpiadas del año 2028?

MURAL DE MATEMÁTICAS

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

LA PROPORCIÓN ES BELLA

Leonardo da Vinci fue uno de los artistas más completos del Renacimiento. Pintor, arquitecto, diseñador de artefactos increíbles para su época...

Estableció ciertas condiciones para que la figura humana fuera armoniosa y proporcionada. Para ello, la altura total dividida entre la altura hasta el ombligo debía ser igual a la altura hasta el ombligo partida por la distancia desde ese punto a la cabeza.

$$\frac{\text{altura total}}{\text{altura hasta el ombligo}} = \frac{\text{altura hasta el ombligo}}{\text{distancia ombligo-cabeza}}$$

Todas sus obras de arte cumplían esa proporción.
Y tú... ¿cumples el canon de belleza de Leonardo?

LA HUELLA DEL ASESINO

Seguro que lo has visto en alguna película: el detective se acerca al lugar del crimen, echa un vistazo a las huellas y afirma muy convencido: "El asesino debe de ser un hombre de aproximadamente 1,80 metros de estatura". ¿Cómo lo sabe?

Aunque no es exacta, existe una relación bastante aproximada entre el tamaño del pie de una persona y su estatura. Es muy raro que un hombre que mida 1,60 calce un 43 y que un jugador de baloncesto use zapatillas del 38. Son dos medidas entre las que existe una cierta relación.

MEDIR A OJO ... Y ESCUADRA

La proporcionalidad puede ayudarnos a medir cosas cuyo tamaño difícilmente podríamos averiguar por otro método. Por ejemplo, un árbol. Es muy sencillo.

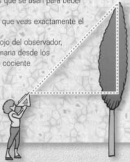
Sujeta a una escuadra por su hipotenusa una pajita de las que se usan para beber refrescos; será tu visor.

Mira hacia la copa del árbol y vete separando de él hasta que veas exactamente el final de la copa.

El triángulo formado por el árbol menos la altura hasta el ojo del observador, la distancia del pie del árbol al observador y la línea imaginaria desde los ojos a la copa del árbol es semejante a la escuadra, cuyo cociente entre catetos es 1.

$$\frac{\text{altura}}{\text{distancia al observador}} = 1$$

Luego la altura del árbol es $d + h$, si h es la altura del observador y d su distancia al árbol.

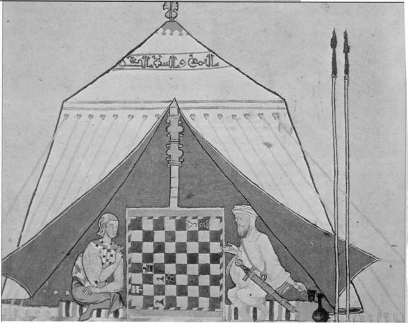


Se hace camino al inventar

Gottfred Leibniz, un matemático, científico y diplomático alemán que vivió entre los siglos XVII y XVIII, decía que **"nada hay más importante que ver los caminos de la inventiva, que son, en mi opinión, más importantes que las invenciones mismas"**.

Sucesiones de números racionales. Progresiones

11



Cuenta la leyenda que Sessa, inventor del ajedrez, presentó el juego a Sheran, príncipe de la India, quien quedó maravillado de lo ingenioso que era y de la variedad de posiciones que en él eran posibles. Con el fin de recompensarle, le preguntó qué deseaba.

Sessa le pidió un corto plazo para meditar la respuesta. Al día siguiente se presentó ante el soberano y le hizo la siguiente petición:

«Soberano, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos granos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así sucesivamente hasta la casilla sesenta y cuatro».

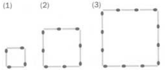
Sessa pedía, por tanto, que le recompensaran con el siguiente número de granos: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63}$; ¡más de 18 trillones!, que es la cosecha que se recogería al sembrar 65 veces toda la tierra. Por supuesto que el príncipe no pudo cumplir su promesa...

En esta unidad estudiaremos las sucesiones, y dos casos particulares: las progresiones aritméticas y las geométricas, y podremos hallar la suma anterior.

1 Regularidades

Observa las siguientes figuras construidas con cerillas:

1. (1) (2) (3) ...



¿Cuántas cerillas se necesitan para formar la figura n-ésima?

Para ello formamos la siguiente tabla:

Figura	1	2	3	...	n
N.º de cerillas	$4 = 4 \cdot 1$	$8 = 4 \cdot 2$	$12 = 4 \cdot 3$	...	?

Parece evidente que para construir la figura n-ésima necesitamos 4n cerillas.

2. (1) (2) (3) (4) ...

¿Cuántas cerillas se necesitan para formar la figura n-ésima?

Formamos la siguiente tabla:

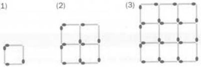
Figura	1	2	3	4	...	n
N.º de cerillas	3	$5 = 3 + 2$	$7 = 3 + 2 + 2$	$9 = 3 + 2 + 2 + 2$	...	?

Observa que para la figura 3.ª se necesitan: $3 + 2 + 2 = 3 + (3 - 1)2$

para la figura 4.ª se necesitan: $3 + 2 + 2 + 2 = 3 + (4 - 1)2$

para la figura n-ésima se necesitan: $3 + (n - 1)2 = 2n + 1$

3. (1) (2) (3) ...



¿Cuántos cuadrados de lado 1 cerilla tendrá la figura n-ésima?

Figura	1	2	3	...	n
N.º de cuadrados	1	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$	...	?

Por tanto, en la figura n-ésima habrá n^2 cuadrados de lado 1 cerilla.

Acabamos de ver que la formación de las figuras guarda una regularidad que permite encontrar una fórmula general para cuando la figura ocupa la posición n.

2 Sucesiones de números racionales

UNA SUCESIÓN CON PALILLOS

Número de palillos necesarios para construir filas de 1, 2, 3, 4, ... cuadrados unidos por un lado.

Número de cuadrados	Número de palillos
1	4
2	7
3	10
4	13
5	...
6	...
...	...
30	...

Tratar de completar la tabla.

Observa la siguiente sucesión construida con palillos

y la tabla del margen.

¿Cuántos palillos se necesitan para construir una fila de n cuadrados unidos por un lado?

Si n es el número de cuadrados y a_n el número de palillos que se necesitan para construir los n cuadrados, de la tabla del margen se deduce que:

$$a_n = 3n + 1$$

Para n = 30, el número de palillos es:

$$a_{30} = 3 \cdot 30 + 1 = 91$$

La cadena de números 1, 7, 10, 13, ... es un ejemplo de **sucesión de números reales**.

> Una **sucesión de números racionales** es de la forma $(a_1, a_2, \dots a_n, \dots)$, donde:
> - Los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ... se llaman **índices**.
> - Los números racionales $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots a_n, \dots$ se llaman **términos**.
>
> A cada número natural (índice) se le hace corresponder un número racional (término).

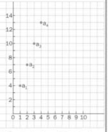
Al término a_n se le llama **término n-ésimo** o **término general**.

Se acostumbra representar la sucesión por el conjunto ordenado de sus términos, con o sin paréntesis, o bien por su término general:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots \quad \text{o bien} \quad (a_n)$$

donde n es un número natural.

REPRESENTACIÓN DE SUCESIONES



Representación gráfica de la sucesión 4, 7, 10, 13, ...

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Hallar los términos generales de las siguientes sucesiones:**

a) El conjunto ordenado de los números pares.

b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \dots\right)$

c) (0, 3, 8, 15, 24, 35, ...)

d) $0, \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right)$

a) $a_n = 2n$ c) $c_n = n^2 - 1$

b) $b_n = \frac{1}{n+1}$ d) $d_n = \frac{n-1}{n}$

3 Operaciones con sucesiones

Producto de una sucesión por un número

Multipliquemos cada término de una sucesión de término general a_n por un número real cualquiera k. Se obtendrá así la siguiente sucesión:

$$ka_1,\ ka_2,\ ka_3,\ \dots,\ ka_n,\ \dots$$

esto es, la sucesión (ka_n), a la que llamaremos sucesión producto del número real k por la sucesión (a_n).

Suma de sucesiones

Dadas las sucesiones de términos generales a_n y b_n, si sumamos sus primeros términos, sus segundos términos, etc., obtenemos una nueva sucesión:

$$s_1 = a_1 + b_1,\ s_2 = a_2 + b_2,\ s_3 = a_3 + b_3,\ \dots,\ s_n = a_n + b_n,\ \dots$$

A la sucesión $(s_n) = (a_n + b_n)$ la llamamos sucesión suma de las sucesiones (a_n) y (b_n).

Producto de sucesiones

Dadas las sucesiones de términos generales a_n y b_n, si multiplicamos sus primeros términos, sus segundos términos, etc., obtenemos una nueva sucesión:

$$p_1 = a_1 \cdot b_1,\ p_2 = a_2 \cdot b_2,\ p_3 = a_3 \cdot b_3,\ \dots,\ p_n = a_n \cdot b_n,\ \dots$$

A la sucesión $(p_n) = (a_n \cdot b_n)$ la llamamos sucesión producto de las sucesiones (a_n) y (b_n).

$$k \cdot (a_n) = (k \cdot a_n)$$
$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

PRODUCTO DE UNA SUCESIÓN POR UN NÚMERO

$(a_n) = \left(\frac{n}{n+3}\right)$	$(3 \cdot a_n)$
$a_1 = \frac{1}{4}$	$3a_1 = \frac{3}{4}$
$a_2 = \frac{2}{5}$	$3a_2 = \frac{6}{5}$
$a_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$3a_3 = \frac{3}{2}$
...	...

$$3 \cdot \left(\frac{n}{n+3}\right) = \left(\frac{3n}{n+3}\right)$$

SUMA DE SUCESIONES

$(a_n)=\left(\frac{n^2}{n+1}\right)$	$(b_n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$(s_n)=(a_n+b_n)$
$(a_1)=\frac{1}{2}$	$(b_1)=\frac{1}{2}$	$s_1=a_1+b_1=1$
$(a_2)=\frac{4}{3}$	$(b_2)=\frac{2}{3}$	$s_2=a_2+b_2=2$
$(a_3)=\frac{9}{4}$	$(b_3)=\frac{3}{4}$	$s_3=a_3+b_3=3$
...	...	...

$$\left(\frac{n^2}{n+1}\right)+\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n^2+n}{n+1}\right)$$

PRODUCTO DE SUCESIONES

$(a_n)=\left(\frac{n}{n+2}\right)$	$(b_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$	$(p_n)=(a_n \cdot b_n)$
$(a_1)=\frac{1}{3}$	$(b_1)=\frac{1}{1}$	$p_1=a_1 \cdot b_1=\frac{1}{3}$
$(a_2)=\frac{2}{4}$	$(b_2)=\frac{1}{2}$	$p_2=a_2 \cdot b_2=\frac{1}{4}$
$(a_3)=\frac{3}{5}$	$(b_3)=\frac{1}{3}$	$p_3=a_3 \cdot b_3=\frac{1}{5}$
...	...	...

$$\left(\frac{n}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n^2+2n}\right)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Dadas las sucesiones (1, 3, 5, 7, 9, ...) y (10, 11, 13, 16, 20, ...), escribir los primeros términos de la sucesión suma y la sucesión producto.**

Sucesión suma: (11, 14, 18, 23, 29, ...)

Sucesión producto: (10, 33, 65, 112, 180, ...)

3 **Dadas las sucesiones de término general $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = n + 2$, calcular:**

a) $2 \cdot (a_n)$ **b)** $(a_n) + (b_n)$ **c)** $(a_n) \cdot (b_n)$

a) $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots\right)$

b) $\left(\frac{1}{n} + n + 2\right) = \left(\frac{(n+1)^2}{n}\right) = \left(\frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \frac{25}{4}, \dots\right)$

c) $\left(\frac{n+2}{n}\right) = \left(\frac{3}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \dots\right)$

4 Progresiones aritméticas. Término general

Consideremos las siguientes sucesiones:

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \dots$$
$$-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \dots$$
$$6,\ 2,\ -2,\ -6,\ -10,\ \dots$$

Observa que, en todas ellas, cada término se obtiene a partir del anterior sumando o restando un número fijo; estas sucesiones se llaman progresiones aritméticas.

Una sucesión de números racionales se llama **progresión aritmética** si cada término se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo, llamado **diferencia**, que suele representarse por **d**:

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d,\ a_4 = a_3 + d,\ \dots,\ a_n = a_{n-1} + d,\ \dots$$

Hallamos el término general a partir del primer término y la diferencia.

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
....
$$a_{40} = a_{39} + d = a_1 + 39d$$
....

En general:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d}$$

Hallamos el término general a partir del término k-ésimo y la diferencia. Si $k < n$, entonces:

$$\boxed{a_n = a_k + (n - k)d}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Hallar el término general de la progresión aritmética 9, 3, −3, −9, −15, ...**

$d = -6,\ a_n = a_1 + (n - 1)\,d = 9 + (n - 1)\,(-6) = 15 - 6n$

5 **El séptimo término de una progresión aritmética es 19 y la diferencia es 4. Hallar el primer término.**

$a_7 = a_1 + (7 - 1)d, \quad 19 = a_1 + 6 \cdot 4, \quad a_1 = 19 - 24 = -5$

6 **Hallar el primer término y la diferencia de una progresión aritmética, sabiendo que el quinto término es $-\frac{1}{2}$, y el decimotercero, $\frac{7}{2}$.**

$a_{13} = a_5 + (13 - 5)d, \quad \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} + 8d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

$a_5 = a_1 + (5 - 1)d, \quad -\frac{1}{2} = a_1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{2}$

PROGRESIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

- *Si $d > 0$, la progresión es creciente. Ejemplo: 2, 5, 8, 11, 14, ...*
- *Si $d < 0$, la progresión es decreciente. Ejemplo: 6, 2, −2, −6, −10, ...*
- *Si $d = 0$, la progresión es constante. Ejemplo: 2, 2, 2, 2, 2, ...*

MUY IMPORTANTE

En una progresión aritmética, d es la diferencia entre cada dos términos consecutivos.

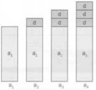
Para comprobar si una sucesión de números es una progresión aritmética, basta hallar la diferencia entre cada término y su anterior y ver si son iguales.

La sucesión

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$$

es una progresión aritmética si:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots = d$$



5 Suma de términos consecutivos de una progresión aritmética

Consideremos la progresión aritmética siguiente: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Si representamos por S_7 la suma de los siete primeros términos, resulta:

$$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$$

o también: $$S_7 = 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$$

Sumando: $$2S_7 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14$$

de donde:

$$2S_7 = 7 \cdot 14 = 7 \cdot (1 + 13) \Rightarrow S_7 = \frac{7 \cdot (1 + 13)}{2}$$

Acabamos de ver, con el ejemplo, que en una progresión aritmética la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos. Eso se debe a que:

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$$
$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n$$
$$\dots$$
$$a_{h+1} + a_{n-h} = a_1 + hd + a_n - hd = a_1 + a_n$$

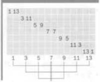
Vamos a calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética:

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 &&+ a_2 &&+ \dots + a_{n-1} &&+ a_n \\
S_n &= a_n &&+ a_{n-1} &&+ \dots + a_2 &&+ a_1 \\
2S_n &= (a_1 + a_n) &&+ (a_2 + a_{n-1}) &&+ \dots + (a_{n-1} + a_2) &&+ (a_n + a_1) = \\
&= (a_1 + a_n) &&+ (a_1 + a_n) &&+ \dots + (a_1 + a_n) &&+ (a_1 + a_n) = \\
&= n(a_1 + a_n)
\end{aligned}$$

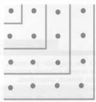
Despejando S_n:

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

LA SUMA DE LOS EXTREMOS



SUMA DE IMPARES



$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Ejercicios resueltos

7 **Hallar la suma de los cincuenta primeros términos de la siguiente progresión aritmética: $3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \dots$**

$a_1 = 3, \quad d = \frac{1}{2}, \quad a_{50} = a_1 + 49d = 3 + 49 \cdot \frac{1}{2} = \frac{55}{2}$

$S_{50} = \frac{50\,(a_1 + a_{50})}{2} = 25\left(3 + \frac{55}{2}\right) = \frac{1\,525}{2}$

6 Progresiones geométricas. Término general

SEGÚN LA RAZÓN

- *Si $|r| > 1$, los términos se van haciendo cada vez mayores en valor absoluto.*
  Ejemplos:
  $3, 6, 12, 24, \dots (r = 2)$
  $5, -10, 20, -40, \dots (r = -2)$
- *Si $r = 1$, la progresión es constante.*
  Ejemplo: $4, 4, 4, 4, \dots$
- *Si $|r| < 1$, los términos se van haciendo cada vez más pequeños en valor absoluto.*
  Ejemplos:
  $27, 9, 3, 1, \dots \left(r = \frac{1}{3}\right)$
  $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \dots \left(r = -\frac{1}{2}\right)$

Consideremos las siguientes sucesiones:

$$2, 6, 18, 54, 162, \dots$$

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$3, -3, 3, -3, 3, \dots$$

Observa que, en todas ellas, cada término se obtiene a partir del anterior multiplicando o dividiendo por un número fijo; estas sucesiones se llaman progresiones geométricas.

Una sucesión de números racionales se llama **progresión geométrica** si cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por un número fijo, llamado **razón**, que suele representarse por **r**:

$$a_2 = a_1 \cdot r,\ a_3 = a_2 \cdot r,\ a_4 = a_3 \cdot r,\ \dots,\ a_n = a_{n-1} \cdot r,\ \dots$$

Hallamos el término general a partir del primer término y la razón.

$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$\dots\dots$$
$$a_{20} = a_{19} \cdot r = a_1 \cdot r^{19}$$
$$\dots\dots$$

En general:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Hallamos el término general a partir del término k-ésimo y la razón.

Si $k < n$, entonces:

$$\boxed{a_n = a_k \cdot r^{n-k}}$$

MUY IMPORTANTE

En una progresión geométrica, r es la razón o cociente entre cada dos términos consecutivos.

Para comprobar si una sucesión de números es una progresión geométrica, basta hallar el cociente de cada término y el anterior, y ver si son iguales.

La sucesión

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$

es una progresión geométrica si:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = r$$

EJERCICIOS RESUELTOS

8 Hallar el término general de la siguiente progresión geométrica: $25, 5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25} \dots$

$$r = \frac{1}{5},\ a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{5^2}{5^{n-1}} = \frac{1}{5^{n-3}}$$

9 Hallar el primer término y la razón de una progresión geométrica, sabiendo que el cuarto término es $\frac{8}{3}$, y el noveno, $\frac{-8}{729}$.

$$a_9 = a_4 \cdot r^{9-4} = a_4 \cdot r^5,\ \frac{-8}{729} = \frac{8}{3} \cdot r^5,\ r^5 = -\frac{1}{243},\ r = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3,\ \frac{8}{3} = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3,\ a_1 = -72$$

7 Suma de términos consecutivos de una progresión geométrica

❖ Suma de n términos consecutivos

Sea $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ una progresión geométrica; queremos calcular la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Para ello, multipliquemos por la razón r los dos miembros:

$$S_n\, r = a_1\, r + a_2\, r + a_3\, r + \dots + a_n\, r = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n\, r$$

Tenemos, por tanto:

$$\begin{array}{l} S_n\, r = \phantom{a_1 +{}} a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n\, r \\ \underline{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n} \end{array}$$

Restando: $S_n\, r - S_n = -a_1 + a_n\, r$

$$S_n\,(r - 1) = a_n\, r - a_1 \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_n\, r - a_1}{r - 1}, \quad \text{si } r \neq 1}$$

Si $r = 1$, todos los términos son iguales, luego $S_n = n \cdot a_1$

❖ Suma de infinitos términos si $|r| < 1$

En este caso podemos calcular la suma de los infinitos términos de la progresión, ya que a medida que n se va haciendo muy grande el término a_n se va haciendo cada vez más pequeño en valor absoluto, de manera que si el número de términos n es infinito, entonces $a_n \cdot r$ es cero.

$$S = \frac{a_n\, r - a_1}{r - 1} = \frac{0 - a_1}{r - 1} \Rightarrow \boxed{S = \frac{a_1}{1 - r}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

10 **En el ejemplo que se expuso en la primera página de esta unidad referente a la invención del ajedrez, hallar el número de granos de trigo que pidió Sessa al príncipe Sheran.**

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 =$$
$$= 18{,}446\,744{,}073\,709{,}551\,615 \text{ granos}$$

11 **Hallar la suma de los términos de la progresión ilimitada:**

$$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$r = \frac{1}{2} < |1|,\ a_1 = 8 \Rightarrow S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Hacer un diagrama.
- Estudiar casos sencillos.
- Buscar regularidades.

PROBLEMA

En un collar de perlas, la perla mayor se encuentra situada en el centro y las demás van disminuyendo en tamaño desde el centro a los extremos. Cada una de las dos perlas más pequeñas situadas en los extremos cuesta 100 €; cada una de las siguientes cuestan 200 €, la tercera perla desde cada extremo cuesta 300 € y así sucesivamente.

a) ¿Cuánto costará la perla central si el collar tiene n perlas?

b) ¿Cuánto costará el collar completo?

HACER UN DIAGRAMA

- Si el collar tiene 3 perlas será:  hay una sola perla central.

  Si el collar tiene 4 perlas será:  hay dos perlas centrales.

  Por tanto debemos estudiar dos casos diferentes cuando n es impar y cuando n es par.

ESTUDIAR CASOS SENCILLOS

- a) Sea n impar

N.º de perlas del collar	Diagrama	Precio en cientos de euros de la perla central	Precio en cientos de euros del collar
3	1-**2**-1	2	1 + 2 + 1 = 4
5	1-2-**3**-2-1	3	1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9
7	1-2-3-**4**-3-2-1	4	1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16
9	1-2-3-4-**5**-4-3-2-1	5	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25
...	...	...	...

b) Sea n par

N.º de perlas del collar	Diagrama	Precio en cientos de euros de la perla central	Precio en cientos de euros del collar
2	**1-1**	1	$1 + 1 = 2 = 1 \cdot 2$
4	1-**2-2**-1	2	$1 + 2 + 2 + 1 = 6 = 2 \cdot 3$
6	1-2-**3-3**-2-1	3	$1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12 = 3 \cdot 4$
8	1-2-3-**4-4**-3-2-1	4	$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 20 = 4 \cdot 5$
...	...	...	...

BUSCAR REGULARIDADES

- a) Se observa que el precio del collar (4, 9, 16, 25, ...) coincide con el cuadrado del precio, en cientos de euros, de la perla central (2, 3, 4, 5, ...).

  Si el collar tiene n perlas (n impar) el precio de la perla central es $\frac{n+1}{2} \times 100$ **€** y el precio del collar completo es: $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \times 100$ **€**.

  b) Razonando de igual modo, si el collar tiene n perlas (n par) el precio de las dos perlas centrales es: $\frac{n}{2} \times 100$ **€**, y el precio del collar completo es: $\frac{n(n+2)}{4} \times 100$ **€**.

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Estudia las regularidades en las siguientes sucesiones y halla la expresión del término general:

a)

b)

c)

d)

e)

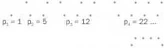
f)

2 Estudia las regularidades en las siguientes sucesiones y halla la expresión del término general. Estos números obtenidos sobre figuras poligonales se llaman *números poligonales*.

$t_1 = 1$ $t_2 = 3$ $t_3 = 6$ $t_4 = 10$

$c_1 = 1$ $c_2 = 4$ $c_3 = 9$ $c_4 = 16$

$p_1 = 1$ $p_2 = 5$ $p_3 = 12$ $p_4 = 22$ ...



$h_1 = 1$ $h_2 = 6$ $h_3 = 15$ $h_4 = 28$ ...

3 En las sucesiones de término general

$$a_n = 5n - 3, \quad b_n = 2n \quad \text{y} \quad c_n = \frac{2n - 1}{n + 1}$$

halla los términos primero, segundo, décimo y vigésimo de cada una de ellas.

4 Averigua si

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{1}{3}, \frac{11}{14} \text{ y } -3$$

son términos de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{n - 2}{n + 1}$$

5 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

b) −2, −4, −6, −8, −10, −12, ...

c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$

d) 1, 8, 27, 64, 125, 216, ...

6 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{-2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{4}, \frac{7}{5}, \frac{10}{6}, \dots$

b) −1, −8, −27, −64, −125, ...

c) 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...

d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \dots$

7 Dadas las sucesiones

$(a_n) = (4, 6, 9, 18, 23, \dots)$ y

$(b_n) = (-1, 3, -2, 4, -3, 5, \dots)$,

halla: $2(a_n)$, $(a_n) + (b_n)$, $(a_n) \cdot (b_n)$

8 Dadas las sucesiones de término general

$$a_n = n - 1 \text{ y } b_n = 2n + 2$$

realiza las siguientes operaciones:

a) $3 \cdot (a_n)$ c) $(a_n) - (b_n)$

b) $(a_n) + (b_n)$ d) $(a_n) + 2 \cdot (b_n)$

9 Dadas las sucesiones de término general

$$a_n = \frac{1}{n + 1}, \quad b_n = n^2, \quad c_n = n + 1$$

realiza las siguientes operaciones:

a) $(a_n) \cdot (b_n)$ c) $(a_n) \cdot (c_n)$

b) $(b_n) \cdot (c_n)$ d) $(a_n) \cdot [(b_n) + (c_n)]$

A C T I V I D A D E S

10 Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, halla su término general:

a) 8, 5, 2, −1, −4, ...
b) 6, 10, 14, 16, 20, ...
c) 4, 8, 16, 32, 64, ...
d) 7, 7, 7, 7, 7, ...

11 El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Halla el primer término y el término general.

12 Halla la suma de los términos de una progresión aritmética en los siguientes casos:

a) Los 25 primeros términos de 3, 8, 13, ...
b) Los 22 primeros términos de 42, 39, 36, ...
c) Los 40 primeros términos de $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \ldots$

13 Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla su término general:

a) $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16, 64, ...
b) 27, 45, 75, 125, $\frac{625}{3}$, ...
c) 12, 20, 28, 36, 44, ...
d) 2, $\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{32}{81}, \ldots$

14 Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1, y la razón, $\frac{1}{2}$, halla el primer término y el término general.

15 El tercer término de una progresión geométrica es 12, y la razón, 2. Calcula la suma de los diez primeros términos.

16 En una progresión geométrica de razón $-\frac{1}{3}$ el tercer término es 1. Halla la suma de sus infinitos términos.

17 La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente ($|r|<1$) es 2, y el primer término es $\frac{1}{2}$. Calcula la razón.

PROBLEMAS PARA APLICAR

18 Escribe los seis primeros términos de la sucesión (a_n) dada por:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

19 Averigua si

$$\frac{65}{9}, \frac{5}{2}, 3 \ \text{ y } \ \frac{85}{7}$$

son términos de la sucesión de término general

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$$

20 Completa los términos intermedios que faltan en las siguientes sucesiones:

a) 7, 10, ___, 16, ___, 22, 25, ...
b) ___, −3, −5, −7, ___, −11, ...
c) $\frac{1}{3}$, ___, 3, 9, ___, 81, ...
d) −5, −3, ___, 1, ___, 5, ...

21 El tercer término de una sucesión aritmética es 15, y el quinto término es 23. ¿Cuál es el primer término?

22 ¿Cuántos términos hay en la sucesión: 3, 7, 11, 15, ..., 439?

23 Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia sabiendo que el tercer término es 24, y el décimo, 66.

A C T I V I D A D E S

24 Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 3.

25 Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1 000 y 2 000.

26 ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14, ... para obtener como resultado 1 064?

27 Tres números en progresión aritmética tienen por producto 16 640, y el más pequeño vale 20. Halla los otros dos.

28 Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60°. Calcula el valor de cada ángulo.

29 En una progresión geométrica el quinto término es 81, y el segundo, -3. Halla el término general.

30 Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 26, y su producto, 216.

31 Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 0,5, y los dos últimos, 0,125.

32 ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7; el último, 448, y su suma, 889?

33 Un polígono de n lados tiene la propiedad de que la medida de sus ángulos forma una progresión aritmética. Si el menor mide 20°, y el mayor, 160°, ¿cuántos lados tiene el polígono?

34 Se cuenta que un tratante de ganado propuso a un señor el siguiente negocio: «Yo le vendo este caballo a condición de que usted me pague un céntimo de euro por el primer clavo de la herradura del caballo, dos céntimos por el segundo clavo, cuatro por el tercero, y así sucesivamente hasta llegar al clavo 32, que es el último». Averigua el precio del caballo.

35 Inés abrió un libro al azar por una determinada página, apuntó el número en una hoja y fue apuntando los números de las páginas que obtenía sumando 7 unidades a cada página anterior.
Al sumar 21 números de las páginas obtuvo 1 995. ¿Por qué página abrió el libro?

36 Considera los enteros del 1 al 100, ambos inclusive. ¿Cuál es la diferencia entre la suma de los pares y la suma de los impares?

37 El teatro de un instituto tiene 25 asientos en la primera fila, 27 en la segunda, 29 en la tercera, y así sucesivamente. ¿Cuántos asientos hay hasta la fila 15?

38 Escribe el término general de la progresión geométrica cuyo primer término es 2 y cuya razón es $\frac{1}{2}$. Calcula la suma de sus cien primeros términos. Calcula la suma de todos los términos.

39 Se tiene un cuadrado de un metro de lado en el que se unen dos a dos los puntos medios de sus lados, obteniéndose así otro cuadrado, y en él se practica la misma operación. Si se procede de este modo sucesiva e indefinidamente, ¿cuál es la suma de las áreas de todos los cuadrados?

A C T I V I D A D E S

CUESTIONES PARA ACLARARSE

40 De una progresión aritmética de un número impar de términos conocemos el término central y el número de términos. Con estos datos, ¿puede calcularse la suma? Pon un ejemplo que aclare la contestación.

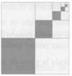
41 En una progresión aritmética cualquiera, compara el valor de un término (distinto del primero) con la semisuma del que lo precede y el que lo sigue. ¿Qué sucede? Trata de demostrar el resultado.

42 ¿Cómo es una progresión aritmética de diferencia 0? ¿Y una progresión geométrica de razón 1?

43 ¿Cómo tiene que ser la razón de una progresión geométrica para que los términos vayan cambiando alternativamente de signo?

44 Elige tres términos consecutivos de una progresión geométrica, multiplica los extremos y compara el resultado con el término medio. ¿Qué encuentras? Prueba que es cierto siempre, cualesquiera que sean los tres términos consecutivos de una progresión geométrica.

45 En el cuadrado de lado 1 metro de la figura se van formando los siguientes cuadrados de lado la mitad del anterior. Halla la suma de las áreas sombreadas.



ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

46 Halla el término general de la siguiente sucesión, llamada sucesión de los números triangulares:

1, 3, 6, 10, 15, ...

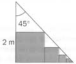
47 Un coronel está al mando de 5 050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas habrá?

48 Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Halla dichos números sabiendo que si se les suma 1, 4, 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica.

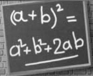
49 En el laboratorio de Ciencias Naturales se realiza un experimento para observar el crecimiento de las bacterias XY34, que se reproducen por bipartición (es decir, cada bacteria al cabo de 30 segundos se divide en dos nuevas bacterias). Partiendo a las doce del mediodía de un cultivo de 100 bacterias, intenta escribir la cantidad de bacterias que debe haber al cabo de medio minuto, un minuto y cinco minutos. ¿Cuántas bacterias habrá aproximadamente a las doce y media?

50 Se considera un triángulo equilátero de lado 2 m. Uniendo los puntos medios de los lados se forma otro triángulo equilátero. Uniendo los puntos medios de los lados de este segundo triángulo se forma otro tercer triángulo equilátero, y así sucesivamente. Hallar la suma de los perímetros y de las áreas de los infinitos triángulos obtenidos.

51 Halla el área total de la sucesión infinita de cuadrados coloreados de la siguiente figura:



MURAL DE MATEMÁTICAS



30 AÑOS PARA ACABAR CON EL HAMBRE

Thomas Malthus fue un economista del siglo XIX que auguró un futuro de crecientes hambrunas para la humanidad, al descubrir que la población crecía en progresión geométrica mientras que la disponibilidad de alimentos solo podía hacerlo en progresión aritmética. Su razonamiento tenía una base real de acuerdo con la naturaleza, pero nuestra especie puede alterar los límites naturales y romper el pronóstico. Aunque 800 millones de personas padecen hambre actualmente, la ONU pretende acabar con este problema en 30 años mediante dos vías:

MATEMÁTICA DE LAS FLORES

Las flores saben matemáticas. Como bien sabes, hay muchos tipos de flores, de muy diferentes formas, tamaños y colores, pero todas ellas se parecen en una cosa: si cuentas sus pétalos verás que siempre te saldrá un número perteneciente a la famosa sucesión de Fibonacci, caracterizada porque cada nuevo término se obtiene sumando los dos anteriores (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34…). La naturaleza parece tener predilección por ella y por eso aparece en muchos otros fenómenos. Por ejemplo, la disposición de las escamas de una piña o la de las pipas en el girasol o los descendientes de una pareja de conejos a lo largo de varias generaciones… Tantas cosas parecen ligadas a esta sucesión, que en Estados Unidos se publica incluso una revista trimestral dedicada a ella, *The Fibonacci Quarterly*.

¿Cómo dice?

"Recuerda que el pensamiento científico es la guía de la acción… y que este pensamiento no es mero comparsa del progreso humano sino el progreso humano en sí".
William Kingdon Clifford.

LA REVOLUCIÓN VERDE

La biotecnología ha conseguido mejorar las técnicas agrícolas y ganaderas multiplicando los alimentos disponibles mucho más de lo que Malthus había previsto, hasta alcanzar un ritmo geométrico. En los años sesenta se puso en marcha un programa llamado *La revolución verde*, para extender a todo el mundo los descubrimientos científicos agronómicos, y en 30 años se logró duplicar la producción mundial de alimentos. Ahora se ha puesto en marcha un nuevo programa que intenta volver a duplicar los alimentos en los próximos 30 años, hasta poder satisfacer plenamente la demanda mundial.

11 000 MILLONES DE HUMANOS

Por otra parte, el desarrollo cultural y científico ha permitido controlar el crecimiento de la población. A pesar del fuerte ritmo de crecimiento de los últimos dos siglos, desde los años setenta el incremento tiende a disminuir. La población crece actualmente a una tasa del 1,4 por 100 anual y sigue disminuyendo. Un estudio realizado por la ONU en 1998 asegura que la cifra actual de 6 000 millones de habitantes nunca llegará a duplicarse, ya que la población se estabilizará en torno a 11 000 millones en el año 2200.

A c t i v i d a d e s

1 Si $a + b = 11$ y $a - b = 3$, halla el valor de $3a - 2b$.

2 Si $m^2 - n^2 = 20$ y $m^2 + n^2 = 52$, encuentra el valor numérico de $m^3 + n^3$.

3 Halla el menor valor entero de x tal que $\frac{12}{x + 1}$ es un número entero.

4 Si $4(9a - 13b) = 6(a - 2b)$, halla la razón $\frac{a}{b}$.

5 En una carrera se destinan 587 euros a premios a los tres primeros, repartidas de forma inversamente proporcional al tiempo invertido. Los tiempos de los tres primeros son 26 min, 28 min y 30 min. Calcula lo que corresponde a cada uno.

6 En una distribución de objetos se da igual número de ellos a cada una de la 15 personas presentes; pero llega una persona más y hay que dar a cada uno un objeto menos, sobrando así 11 objetos. Halla el número de objetos a repartir.

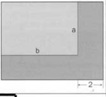
7 En un rectángulo de perímetro 152 cm, la base mide 9 unidades más que la altura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

8 Pedro dice a Juan: «Yo tengo dos veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuanto tú tengas la edad que yo tengo la suma de nuestras edades será 63 años». Halla la edad de cada uno.

9 Un depósito tiene un grifo que lo llena en 3 horas; otro lo llena en 4 horas y un desagüe lo vacía en 5 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse si se abren a la vez los tres?

10 Calcula los ángulos de un pentágono, sabiendo que son proporcionales a los 5 primeros múltiplos de 3.

11 En un colegio hay 237 estudiantes menos en Primaria que en Secundaria. Si el número total de alumnos es 1 279, de los que 200 son de Educación Infantil, ¿cuántos alumnos hay en Primaria y en Secundaria?



12 Si los lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro vale 24 cm. Sabiendo además que la diferencia de los lados es 2 cm, ¿cuánto miden los lados del rectángulo?

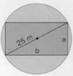
13 El área de un triángulo rectángulo es de 60 cm^2 y la suma de los catetos es 23 cm. Halla los lados.

14 Una familia tiene periquitos y perros como mascotas. Averigua cuántos perros y cuántos periquitos tienen, sabiendo que en total hay 6 animales y el número total de patas es 16.

15 La edad de Javier era exactamente hace 3 años el triple que la de Elena, pero dentro de 4 años será solamente el doble. Halla las edades actuales de los dos.

16 El perímetro de un triángulo rectángulo es de 60 cm y el cateto menor tiene 16 cm menos que la hipotenusa. Halla los valores de los lados.

17 En un círculo de diámetro 25 m se inscribe un rectángulo teniendo 17 m de diferencia entre los dos lados. Halla el valor de estos lados.

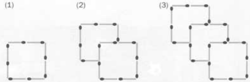


18 Las aristas de dos cubos difieren en 2 cm y sus volúmenes en 56 cm^3. Halla el valor de las aristas.

19 Son las 12 del día. ¿A qué hora formarán las agujas un ángulo recto?

20 Son las 3 de la tarde. ¿A qué hora estarán las agujas en línea recta?

21 ¿Cuántas cerillas se necesitan para la figura n-ésima?



22 El sexto término de una progresión aritmética es igual a 41 y el tercer término es 23.

a) ¿Cuánto vale el primer término?
b) ¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros términos?

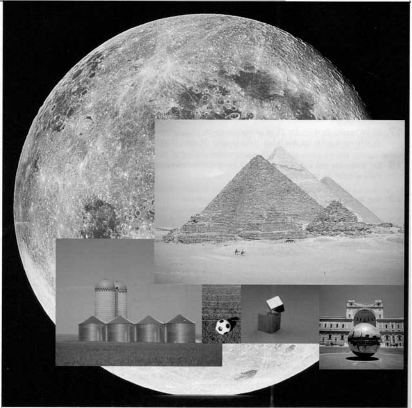
23 En una progresión geométrica el primer término es igual a 2 y el cuarto término es igual a $\frac{1}{4}$

a) ¿Cuánto vale el término 10?
b) ¿Cuánto vale la suma de todos los términos de la sucesión?

24 Se desconoce el capital que un señor ingresó en un banco pero se sabe que al 4,5 % durante 7 años ha producido un interés simple de 12 219,48 €. ¿Qué capital inicial ingresó?

Figuras y cuerpos geométricos

12



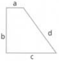
Según Kepler «donde hay materia, hay geometría». La naturaleza, los edificios, las obras de arte y los utensilios que utiliza el hombre tienen siempre un fundamento geométrico y expresan la belleza de las rectas, curvas y superficies de que se componen estos cuerpos.

Salir a la calle es encontrarse con la geometría en todas sus facetas. Por ejemplo, unas sencillas pirámides constituyen toda la fascinación milenaria que sienten y admiran los turistas que visitan Egipto. En esta unidad se estudian las líneas, superficies y volúmenes de estos cuerpos de la vida cotidiana idealizados en las figuras y cuerpos geométricos.

1 Cálculo de longitudes y áreas: fórmulas fundamentales

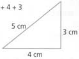
Perímetro de una figura

El perímetro de una figura es la suma de la medida de sus lados.



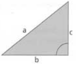
$p = a + b + c + d$

$p = 5 + 4 + 3$



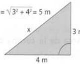
Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo se verifica que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



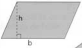
$a^2 = b^2 + c^2$

$x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m



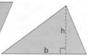
Áreas de figuras fundamentales

PARALELOGRAMO



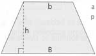
$A = b \cdot h$

TRIÁNGULO



$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

TRAPECIO



$A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

PENTÁGONO REGULAR

a = apotema
p = perímetro

$A = \dfrac{p \cdot a}{2}$

Longitud de la circunferencia y área del círculo

$L = 2\pi r$

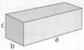
r = radio
$\pi = 3{,}141592...$

$A = \pi r^2$

Volumen de un cuerpo fundamental: el ortoedro

El volumen del ortoedro es largo (a), por ancho (b) y por alto (c); o bien, área de la base (B) por la altura (h = c):

$$V = a \cdot b \cdot c = B \cdot h$$



2 Longitudes y áreas de figuras circulares

SECTOR CIRCULAR

Las longitudes de los arcos son proporcionales a sus medidas en grados. También, las áreas de los sectores son proporcionales a sus medidas en grados. Utilizaremos entonces las proporciones:

$$\frac{\text{L. circunferencia}}{360^\circ} = \frac{\text{L. arco}}{n^\circ}$$

$$\frac{\text{A. círculo}}{360^\circ} = \frac{\text{A. sector}}{n^\circ}$$

ARCO

Longitud del arco

$$\text{L. Arco} = \frac{\text{L. circunferencia} \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{\mathbf{2\pi rn^\circ}}{\mathbf{360^\circ}}$$

Área del sector circular

$$A = \frac{\text{A. círculo} \cdot n^\circ}{360^\circ} = \frac{\mathbf{\pi r^2 n^\circ}}{\mathbf{360^\circ}}$$

CORONA CIRCULAR

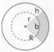
Área de la corona circular

Se halla por diferencia de las áreas de los dos círculos:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \boldsymbol{\pi}(R^2 - r^2)$$

Área del trapecio circular

TRAPECIO CIRCULAR



$h = R - r$

Se halla por diferencia de las áreas de los dos sectores:

$$A = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} - \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{\boldsymbol{\pi} n^\circ(R^2 - r^2)}{360^\circ}$$

Esta fórmula se puede expresar también así:

$$A = \frac{B + b}{2}\, h$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Hallar la longitud del arco y el área de un sector circular de radio 20 cm y de ángulo 120°.**

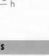
$$L = \frac{2\ \pi\ 20 \cdot 120}{360} = 41{,}89 \text{ cm}$$

$$A = \frac{\pi\ 20^2 \cdot 120}{360} = 418{,}88 \text{ cm}^2$$

2 **Hallar el área de las siguientes figuras:**

$$A = \pi\ (5^2 - 3^2) = 50{,}27 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{\pi\ 60\ (5^2 - 3^2)}{360} = 8{,}38 \text{ cm}^2$$



3 Poliedros regulares

Trata de unir triángulos equiláteros iguales para construir un poliedro. Observarás que puedes construir el **tetraedro** (4 triángulos equiláteros iguales), el **octaedro** (8 triángulos equiláteros iguales) y el **icosaedro** (20 triángulos equiláteros iguales).

Al unir cuadrados iguales solo es posible construir el **cubo** (6 cuadrados iguales).

Y al unir pentágonos regulares iguales solo es posible construir el **dodecaedro** (12 pentágonos iguales).

A partir de aquí ya no es posible unir polígonos regulares iguales para construir otros poliedros diferentes de los que acabamos de ver.

Poliedro regular es el poliedro cuyas caras son polígonos regulares iguales, de modo que en cada vértice concurre el mismo número de caras. Los poliedros regulares son: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

En los poliedros que manejamos ordinariamente, el número de caras (c), vértices (v) y aristas (a) no puede ser cualquiera.

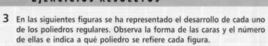
Por ejemplo:

	caras + vértices	aristas + 2
Tetraedro	4 + 4	6 + 2
Cubo	6 + 8	12 + 2

En general se cumple la relación **c + v = a + 2**. A esta igualdad se llama **fórmula de Euler**. Los poliedros que la cumplen se llaman **poliedros simples**.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **En las siguientes figuras se ha representado el desarrollo de cada uno de los poliedros regulares. Observa la forma de las caras y el número de ellas e indica a qué poliedro se refiere cada figura.**



a) Tiene cuatro caras que son triángulos equiláteros. Se trata de un tetraedro.
b) Tiene ocho caras que son triángulos equiláteros. Se trata de un octaedro.
c) Tiene seis caras que son cuadrados. Se trata de un cubo.
d) Tiene veinte caras que son triángulos equiláteros. Se trata de un icosaedro.
e) Tiene doce caras que son pentágonos regulares. Se trata de un dodecaedro.

CONSTRUCCIÓN DE POLIEDROS REGULARES


Tetraedro (4 caras)


Cubo (6 caras)


Octaedro (8 caras)

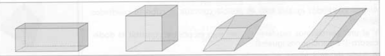

Dodecaedro (12 caras)


Icosaedro (20 caras)

4 Prismas y pirámides

Paralelepípedos

Paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos y, por tanto, todas las caras.

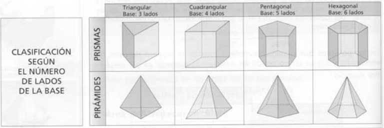


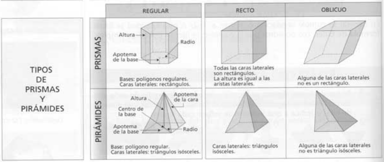
Ortoedro Todas sus caras son rectángulos

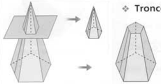
Cubo Todas sus caras son cuadrados

Romboedro Todas sus caras son rombos

Romboidedro Todas sus caras son romboides







Tronco de pirámide y pirámide deficiente

Tronco de pirámide es la parte de la pirámide comprendida entre la base y la sección determinada por un plano paralelo a la base que corte a la pirámide. Esta sección es la base pequeña.

La **altura del tronco** es la distancia entre las bases.

Pirámide deficiente es la parte de pirámide determinada por la base pequeña y el vértice.

5 Propiedades métricas de prismas y pirámides

Las propiedades métricas de los prismas y las pirámides relacionan sus diferentes elementos y se basan todas en el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras en el espacio

Se llama **diagonal** de un ortoedro al segmento que une dos vértices no situados en la misma cara.

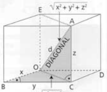
Calculemos la diagonal del ortoedro de la figura aplicando dos veces el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OC}^2 = x^2 + y^2$$

$$d^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Por tanto,

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Los valores de las aristas de un ortoedro se llaman también **dimensiones**.

Se designan: largo, ancho y alto.

> En un ortoedro, el cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Hallar la diagonal de un cubo de arista x centímetros.**

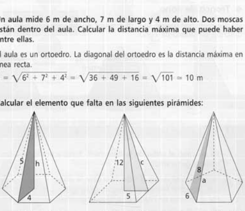
$$d = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = \sqrt{3\,x^2} = x\sqrt{3}$$

5 **Un aula mide 6 m de ancho, 7 m de largo y 4 m de alto. Dos moscas están dentro del aula. Calcular la distancia máxima que puede haber entre ellas.**

El aula es un ortoedro. La diagonal del ortoedro es la distancia máxima en línea recta.

$$d = \sqrt{6^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 49 + 16} = \sqrt{101} \simeq 10 \text{ m}$$

6 **Calcular el elemento que falta en las siguientes pirámides:**



$4^2 + h^2 = 5^2$, $h = 3$

$c^2 = 5^2 + 12^2$, $c = 13$

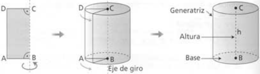
$a^2 = 6^2 + 8^2$, $a = 10$

6 Cuerpos redondos: cilindros y conos

Un **cuerpo redondo** se obtiene al girar un recinto plano alrededor de un eje situado en el mismo plano de modo que cada punto del recinto describe una circunferencia al dar una vuelta completa.

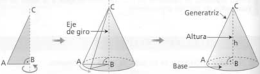
Cilindro

Un rectángulo que gira sobre un lado describe un cilindro.



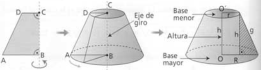
Cono

Un triángulo rectángulo que gira sobre un cateto describe un cono.



Tronco de cono

Un trapecio rectángulo que gira sobre el lado perpendicular a las bases describe un tronco de cono.



EJERCICIOS RESUELTOS

7 En un cono el radio de la base mide 3 cm y la altura 4 cm. ¿Cuánto mide la generatriz?

En la figura se ve que el radio de la base, la altura y la generatriz forman un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras se tiene la igualdad:

$3^2 + 4^2 = g^2$ luego $g^2 = 25$

Por tanto, la generatriz mide 5 cm.

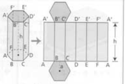
7 Áreas de poliedros, cilindros y conos

Observa el prisma de la figura y su desarrollo. Las caras laterales dan lugar a un rectángulo cuya base mide el perímetro de la base del prisma y su altura coincide con la del prisma. Así que el área lateral es:

$$A_L = p\,h$$

El área total se halla sumando al área lateral las áreas de las dos bases:

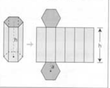
$$A_T = ph + pa$$



p = perímetro de la base
h = altura
a = apotema de la base

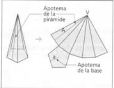
De este modo se obtienen las siguientes fórmulas:

PRISMA REGULAR RECTO



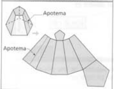
$A_L = p \cdot h$ $\quad$ $A_T = p \cdot h + p \cdot a$

PIRÁMIDE REGULAR RECTA



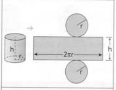
$A_L = \dfrac{p \cdot A}{2}$ $\quad$ $A_T = \dfrac{p \cdot A}{2} + \dfrac{p \cdot a}{2}$

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR



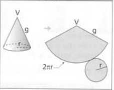
$A_L = \dfrac{(P + p) \cdot A}{2}$ $\quad$ $A_T = A_L + A_{bases}$

CILINDRO RECTO



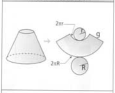
$A_L = 2\pi r \cdot h$ $\quad$ $A_T = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$

CONO RECTO



$A_L = \pi r \cdot g$ $\quad$ $A_T = \pi r \cdot g + \pi r^2$

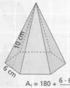
TRONCO DE CONO RECTO

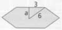


$A_L = \pi(R + r) \cdot g$ $\quad$ $A_T = A_L + A_{bases}$

EJERCICIOS RESUELTOS

8 **Hallar el área lateral y total de las siguientes figuras:**





$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

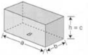
$A_L = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 10}{2} = 180 \text{ cm}^2$

$A_T = 180 + \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 180 + 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$A_L = \pi(5 + 3) \cdot 7 = 56\pi \text{ cm}^2$

$A_T = 56\pi + \pi 3^2 + \pi 5^2 = 90\pi \text{ cm}^2$

8 Volúmenes de cuerpos simples



$V = a \cdot b \cdot c = B \cdot h$

RECUERDA

El volumen de un prisma o de un cilindro es

$$\boxed{V = B \cdot h}$$

RECUERDA

El volumen de una pirámide o de un cono es

$$\boxed{V = \frac{B \cdot h}{3}}$$

Para hallar las fórmulas de los volúmenes de los cuerpos simples se parte del volumen de ortoedro.

El volumen de ortoedro es **área de la base por la altura**.

Para los demás cuerpos se puede hacer una comprobación experimental llenando los cuerpos con arena fina.

Volúmenes de prismas y cilindros

Todos los prismas y cilindros que tienen la misma base y altura tienen el mismo volumen, igual al del ortoedro que tiene esa misma base y altura. El volumen es: $V = B \cdot h$

Volúmenes de pirámides y conos

Todas las pirámides y conos que tienen la misma base y altura tienen el mismo volumen, igual a la tercera parte del volumen del prisma o cilindro que tienen esa misma base y altura. El volumen es: $V = \dfrac{B \cdot h}{3}$

EJERCICIOS RESUELTOS

9 Hallar el volumen de los siguientes cuerpos (las medidas están en cm):

a) La altura de la base es: $\sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = 2{,}6$ cm

$V = \dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} \cdot 6 = 23{,}4\ cm^3$

b) $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 471{,}24\ cm^3$

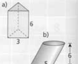
c) Si a es la altura de la base, resulta:

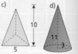
$a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33$ cm

Área de la base $= \dfrac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}825\ cm^2$

$V = \dfrac{10{,}825 \cdot 10}{3} = 36{,}08\ cm^3$

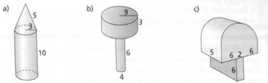
d) $V = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 11}{3} = 103{,}67\ cm^3$





9 Áreas y volúmenes de cuerpos compuestos

Observa los siguientes cuerpos compuestos, cuyas medidas están dadas en centímetros.



Para calcular el área y el volumen de estos cuerpos compuestos hay que descomponerlos en cuerpos simples, calcular sus áreas y sus volúmenes ordenadamente y sumarlas.

EJERCICIOS RESUELTOS

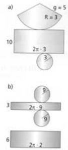
10 **Calcular el área de los cuerpos compuestos anteriores.**

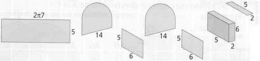
a) $A = A_{L\,cono} + A_{L\,cilindro} + A_{base\ del\ cilindro} =$
$= \pi \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10 + \pi \cdot 3^2 =$
$= 84\,\pi = 263{,}89\ cm^2$

b) $A = A_{L\,cilindro\ mayor} + 2\,A_{base\ cilindro\ mayor} + A_{L\,cilindro\ menor} =$
$= 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 3 + 2 \cdot \pi \cdot 9^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 =$
$= 240\,\pi = 753{,}98\ cm^2$

c) El radio del cilindro es: $\frac{1}{2}(6 + 2 + 6) = 7$ cm

$A = \frac{1}{2} A_{L\,cilindro} + \frac{1}{2} \cdot 2\,A_{base\ del\ cilindro} + A_{L\,ortoedro} +$
$+ A_{base\ ortoedro} + 2\,A_{rectáng.\ inferior} =$
$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot 5 + \pi \cdot 7^2 + 14 \cdot 6 + 2 \cdot 5 +$
$+ 2 \cdot 6 \cdot 5 = 154 + 84\pi = 417{,}89\ cm^2$





11 **Calcular el volumen de los cuerpos compuestos anteriores.**

a) La altura del cono es: $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

$V = V_{cono} + V_{cilindro} = \frac{1}{3}\,\pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 320{,}44\ cm^3$

b) $V = V_{cilindro\ mayor} + V_{cilindro\ menor} = \pi \cdot 9^2 \cdot 3 + \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 838{,}8\ cm^3$

c) $V = V_{semicilindro} + V_{ortoedro} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 \cdot 5 = 444{,}85\ cm^3$

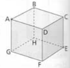
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Tantear posibles soluciones.
- Desarrollar la figura.
- Resolver e interpretar los resultados.

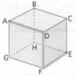
EL PROBLEMA

Una araña situada en el vértice A del cubo de la figura ve llegar una mosca que se posa en el vértice E. ¿Cuál será el camino más corto que deberá recorrer la araña sobre la superficie del cubo para capturar a la mosca? Si la arista del cubo mide 10 cm, ¿cuánto medirá el camino más corto?

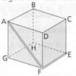


TANTEAR SOLUCIONES POSIBLES

- Dos posibles soluciones corresponden a los siguientes recorridos:



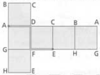
$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DF} + \overline{FE}$



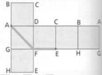
$\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE}$

DESARROLLAR LA FIGURA

- Para encontrar el camino más corto sobre la superficie se desarrolla el cubo:

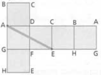


$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DF} + \overline{FE}$



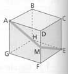
$\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE}$

Hay un camino más corto: ir directamente de A a E.



$$\frac{MF}{FE} = \frac{AG}{GE} = \frac{1}{2}$$

M es el punto medio de la arista $\overline{DF}$.

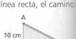


RESOLVER E INTERPRETAR LOS RESULTADOS

- Como la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta, el camino que deberá seguir la araña para capturar a la mosca será el segmento $\overline{AE}$.

La medida del camino $\overline{AE}$ es:

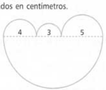
$\overline{AE} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22{,}36$ cm



ACTIVIDADES

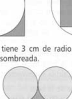
EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Halla el área y el perímetro de la siguiente figura, donde los diámetros de las circunferencias están dados en centímetros.

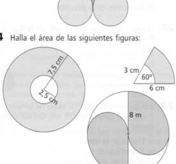


2 Sabiendo que el radio de cada círculo es un metro, halla la suma de las áreas sombreadas.

3 Cada círculo tiene 3 cm de radio. Halla el área de la región sombreada.



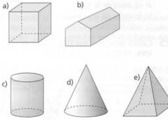
4 Halla el área de las siguientes figuras:



5 Halla la longitud del arco y el área de un sector circular de 60° siendo el radio de la circunferencia igual a 10 m.

6 Comprueba que en los poliedros regulares octaedro, dodecaedro e icosaedro se cumple la fórmula de Euler.

7 Clasifica los siguientes cuerpos geométricos dando también el nombre de cada uno de ellos:



8 De cada uno de los cuerpos geométricos del ejercicio anterior dibuja su desarrollo.

9 Calcula el valor de las diagonales de los cubos cuyas aristas miden:

a) 1 cm c) 3 cm
b) 2 cm d) 4 cm

10 Calcula el valor de las aristas de los cubos cuyas diagonales miden:

a) 18 cm c) 24 cm
b) 66 cm d) 12 cm

11 Dibuja un tetraedro regular. Si cada arista mide 10 cm, calcula sucesivamente:

a) La altura de cada cara.
b) La altura del tetraedro.

12 Dibuja una pirámide recta de base cuadrada. La arista de la base mide 10 cm, y la arista lateral, 13 cm. Calcula sucesivamente:

a) La altura de la cara.
b) La altura de la pirámide.

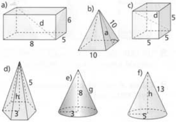
13 Dibuja una pirámide recta cuya base es un triángulo equilátero. La arista de la base mide 12 cm, y la arista lateral, 17 cm. Calcula sucesivamente:

a) La altura de la cara.
b) La altura de la pirámide.

14 Dibuja una pirámide recta cuya base es un hexágono. La arista de la base mide 16 cm, y la arista lateral, 19 cm. Calcula sucesivamente:

a) La altura de la cara.
b) La altura de la pirámide.

15 Calcula los valores que faltan, señalados con una letra, en los siguientes cuerpos:



16 Dibuja un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero. La arista de la base mide 6 cm, y la arista lateral, 8 cm. Calcula sucesivamente:

a) El área de las bases.
b) El área de las caras laterales.
c) El área de todo el prisma.
d) El volumen del prisma.

17 Calcula el volumen de los siguientes ortoedros cuyas dimensiones son:

a) 10 cm	20 cm	30 cm
b) 25 cm	40 cm	50 cm
c) 50 cm	80 cm	100 cm

18 Dibuja un ortoedro de base cuadrada. La arista de la base mide 5 cm, y la arista lateral, 9 cm. Calcula sucesivamente:

a) El área de las bases.
b) El área de las caras laterales.
c) El área de todo el prisma.
d) El volumen del prisma.

19 Dibuja un cilindro recto. El radio de la base mide 5 cm, y la altura, 12 cm. Calcula sucesivamente:

a) El área de la base.
b) El área lateral.
c) El área de todo el cilindro.
d) El volumen del cilindro.

20 Dibuja un prisma recto cuya base es un hexágono regular. La arista de la base mide 9 cm, y la arista lateral, 12 cm. Calcula sucesivamente:

a) El área de las bases.
b) El área de las caras laterales.
c) El área de todo el prisma.
d) El volumen del prisma.

21 Dibuja una pirámide recta de base cuadrada. La arista de la base mide 10 cm, y la arista lateral, 13 cm. Calcula sucesivamente:

a) El área de la base.
b) El área de las caras laterales.
c) El área de toda la pirámide.
d) El volumen de la pirámide.

22 Dibuja un cono recto. El radio de la base mide 5 cm, y la altura, 12 cm. Calcula sucesivamente:

a) El área de la base.
b) El área lateral.
c) El área de todo el cono.
d) El volumen del cono.

23 Dibuja un cono recto. El radio de la base mide 7 cm, y la generatriz, 13 cm. Calcula sucesivamente:

a) El área de la base.
b) El área lateral.
c) El área de todo el cono.
d) El volumen del cono.

A C T I V I D A D E S

PROBLEMAS PARA APLICAR

24 Una clase tiene 10 m de largo, 8 m de ancho y 4 m de alto. Se trata de llenarla con cajas cúbicas de 1 m de lado. ¿Podrías decir cuántas se necesitan? Si la clase tiene 40 alumnos y cada alumno transporta el mismo número de cajas, ¿podrías decir también cuántas cajas tiene que mover cada uno? Se supone que todos trabajan lo mismo.

25 ¿Cabe un bastón de 90 cm de largo en una caja de dimensiones 50 cm $\times$ 70 cm $\times$ 35 cm?

26 Una regla de 60 cm, ¿cabe dentro de un cajón de una mesa de 27 cm de ancho, 54 de largo y 18 de alto? ¿Cabe tumbada en el fondo del mismo?

27 Se quiere construir un monumento en forma de pirámide regular recta de base cuadrada con una altura de 30 m. Si se han necesitado 2 000 m^3 de piedra, ¿podrías indicar el lado de la base de la pirámide?

28 En Bocequillas de Abajo quieren construir un depósito de agua en forma de ortoedro cuya altura es 10 m y su capacidad 4 000 m^3. ¿Podrías hallar el lado de la base sabiendo que es cuadrada?

29 Una empresa envía sus productos en cajas cuyas dimensiones son 50 cm, 30 cm y 20 cm. Estas cajas se introducen luego en un contenedor de forma cúbica. Se pide:

a) Las dimensiones del contenedor sabiendo que es el menor cubo en el que caben exactamente las cajas.
b) El número de cajas de cada tipo que entran en el contenedor.
c) El volumen del contenedor.

30 Una carcoma se ha instalado en un precioso cubo de madera de un metro de arista. Piensa comerse el metro cúbico entero comiendo en cada segundo un milímetro cúbico. ¿Para cuánto tiempo tendrá comida?

31 Un vaso tiene forma de tronco de cono; el diámetro de la base mayor es igual a 7 cm y el radio de la base menor es igual a 2,5 cm. Si la generatriz es igual a 10 cm, halla lo siguiente:

a) Área lateral. b) Área total. c) Volumen.

32 Un paquete de palomitas tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular; el lado de la base mayor mide 15 cm; el lado de la base menor mide 10 cm; la apotema de una de las caras es igual a 20 cm. Halla lo siguiente:

a) Área lateral. b) Área total. c) Volumen.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

33 Uniendo el centro de un cubo con los vértices de una cara se obtiene una pirámide cuadrangular. ¿Qué relación hay entre el volumen de la pirámide y el del cubo?

34 Sabes cómo se calcula el área de un cubo conociendo la arista. Si conoces la diagonal de un cubo, ¿podrías hallar su área sin calcular el lado?

35 Un cubo de 8 cm de arista está formado por la yuxtaposición de 8^3 cubos blancos de 1 cm de arista. Luego, se pinta de negro el cubo grande. Se pide:

a) ¿Cuántos cubos hay completamente blancos?
b) ¿Cuántos hay con una sola cara negra?
c) ¿Cuántos hay con solo dos caras negras?
d) ¿Cuántos hay con solo tres caras negras?

36 Imagínate un cubo de madera de 3 cm de arista. Cortándolo convenientemente obtienes cubos de 1 cm de arista.

a) ¿Cuál es el volumen del cubo original? ¿Cuál es el volumen de los cubos obtenidos? Compáralos.
b) ¿Cuál es la superficie del cubo original? ¿Cuál es la superficie de los cubos obtenidos? Compáralos.

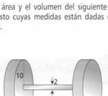
37 Tienes un cubo de madera de 1 m de lado. Lo divides (mentalmente) en cubitos de un 1 cm de lado. Si pones todos los cubitos en línea recta, uno a continuación de otro, ¿cuál es la distancia máxima en metros que puedes alcanzar?

38 ¿Qué pirámide tiene todas las caras iguales?

ACTIVIDADES

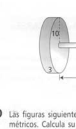
ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

39 Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo compuesto cuyas medidas están dadas en centímetros.

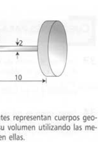


40 Las figuras siguientes representan cuerpos geométricos. Calcula su volumen utilizando las medidas que se dan en ellas.

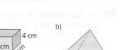
a)



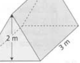
b)



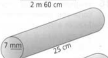
c)



d)



e)



41 El volumen de un cubo es numéricamente igual a su área total. Si se toma como unidad el centímetro:

a) Cuánto mide su arista?
b) ¿Cuánto vale su área?
c) ¿Cuánto vale su volumen?

42 En un ortoedro sus dimensiones son proporcionales a los números 3, 4 y 12, y su suma es 38 m. Halla la longitud de sus lados y la medida de su diagonal.

43 De un mismo material se han hecho cuatro cubos macizos de lados distintos, a saber: 3 cm, 4 cm, 5 cm y 6 cm. Hay que colocarlos en los platillos de una balanza de modo que estos queden en equilibrio. ¿Sabrías colocarlos?

44 Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a los números 3, 4 y $\frac{8}{3}$, y la cara que tiene las dos primeras dimensiones tiene una diagonal de 15 m. Halla las dimensiones del ortoedro.

45 Al señor Pedrales le han encargado los vecinos de Orejilla de Abajo la realización de un obelisco formado por un cilindro y un cono, ambos de la misma altura. El presupuesto del señor Pedrales es de 6 millones. Por parecerles pequeño, le han mandado que duplique el radio de la base del cilindro. ¿Cuánto cobrará ahora por todo el obelisco si el precio depende de la cantidad de piedra empleada?

46 Un gigante mide 2 m, y un enano, 1 m. Suponiendo que tienen la misma forma, ¿podrías decir cuántas veces aproximadamente pesará más el gigante que el enano?

47 Las dimensiones de un contenedor en forma de ortoedro son 10,3 m, 3,10 m y 2,05 m. Se introducen en él cubos de 1 m:

a) ¿Cuántos se pueden meter si los cubos se apilan apoyándose sobre las caras?
b) ¿Cuál es el volumen aproximado del contenedor utilizando cubos de 1 m?

48 En un ortoedro la suma de los cuadrados de las doce aristas es igual a la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales. Compruébalo.

M U R A L D E

MATEMÁTICAS

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

POLIEDROS PARA EXPLICAR EL MUNDO

A los griegos les fascinaba que solo hubiera cinco poliedros regulares. Tanto que Platón identificaba cada uno de ellos con un elemento natural.

El octaedro con el aire.

El icosaedro con el agua.

El cubo con la tierra.

El tetraedro con el fuego.

El dodecaedro con el orden del universo.

Galería de retratos

Euclides

El gran ordenador

Antes de Euclides ya se sabían muchas cosas sobre aritmética, geometría, etc. Su mérito consiste en haber sido capaz de reunir y ordenar esos conocimientos.

Aunque es poco lo que se sabe de él, se cree que Euclides, que vivió en el siglo III antes de Cristo, fundó una escuela en Alejandría (Egipto) que convirtió a esa ciudad en el centro de la ciencia matemática de su época.

Autor de un *best-séller*

Los trece libros que forman los *Elementos* (luego un discípulo añadió dos más) aún se estudian y son una de las obras más editadas de la historia.

Los tres últimos volúmenes de la obra son los que se refieren a estereometría (la medición de los cuerpos). En ellos analiza las figuras de la pirámide, el cono y la esfera.

En este fresco puedes ver a Euclides enseñando geometría a sus discípulos.

GOLPEA EL ICOSAEDRO Y... ¡GOOOOOL!

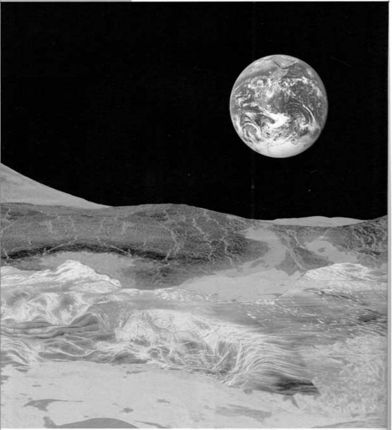
Aunque te parezca mentira, cuando disparas a puerta en un partido de fútbol estás dándole una patada a un icosaedro truncado.

Esa es la forma geométrica del balón de fútbol. Consta de 12 pentágonos y 20 hexágonos y ocupa el 87,74 % de la esfera. El resto, hasta conseguir una esfera, se logra gracias al hinchado y a que las piezas del icosaedro truncado son de cuero y, por tanto, capaces de deformarse ligeramente.

Un nuevo diseño del balón, un rombicosidodecaedro formado por 12 pentágonos, 30 cuadrados y 20 triángulos, se acerca aún más (en un 94,32 %) a la esfera.

La esfera

13



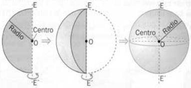
La Tierra en que vivimos es una esfera casi perfecta.

Al cabo de un año, la Tierra da una vuelta alrededor del Sol y 365 vueltas, una cada día, sobre su eje de rotación. Los días y las noches dependen de su movimiento de rotación, y las estaciones del año, de su movimiento de traslación alrededor del Sol. Vivimos sobre una esfera, y los elementos de una esfera: polos, meridianos, ecuador, paralelos, zonas..., provienen de los nombres dados en la Tierra a los elementos semejantes.

1 La esfera: definición y elementos

Definición

Observa las siguientes figuras:



Un semicírculo que gira sobre su diámetro describe en el espacio un cuerpo geométrico: la esfera.

Considera ahora la semicircunferencia correspondiente a ese círculo, es decir, como si estuviera hecho de alambre.

Si gira alrededor de su diámetro describe una superficie curva que es la **superficie esférica**.

La superficie esférica es el modelo de un balón de fútbol.

Las siguientes definiciones son similares a las de la circunferencia.

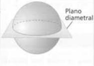
— **Centro:** Es el centro del círculo.
— **Radio:** Es cualquier segmento que une el centro con un punto de la superficie.
— **Cuerda:** Es cualquier segmento que une dos puntos de la superficie.
— **Diámetro:** Es cualquier cuerda que pasa por el centro.
— **Polos:** Son los puntos de intersección del eje de giro con la superficie esférica.

SUPERFICIE ESFÉRICA

La superficie esférica está formada por todos los puntos del espacio cuya distancia al centro es igual al radio.

Figuras geométricas en la esfera

Para ver mejor las figuras en la esfera puedes imaginarte que tienes una naranja, lo más redonda posible, y un cuchillo. Cada corte del cuchillo es similar a trazar un plano que corte a la esfera.

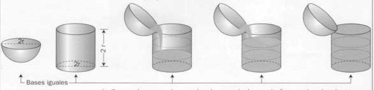
Hemisferio	Casquete esférico	Zona esférica	Huso y cuña esféricos
			
Es cada una de las partes en las que queda dividida la superficie esférica por un plano que pasa por su centro.	Es cada una de las partes de la superficie esférica que determina un plano secante a la esfera.	Es la parte de la superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos.	El huso es la parte de la superficie esférica comprendida entre dos planos que tienen un diámetro común. La cuña es el volumen determinado por esos planos.

2 Volumen de la esfera

Cortamos por la mitad una pelota hueca de goma o de plástico para obtener una semiesfera.

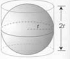
Construimos un cilindro de cartulina cuya altura coincida con el diámetro de la semiesfera (2r) y cuya base tenga el mismo diámetro que la semiesfera (2r).

Si llenamos con arena fina la semiesfera y la pasamos al cilindro, comprobaremos que para llenar el cilindro se necesita exactamente tres semiesferas.



Comprobamos así que el volumen de la semiesfera es igual a la tercera parte de del volumen del cilindro.

Tenemos, entonces:



$$V_{cilindro} = B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi \cdot r^3$$

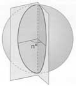
$$V_{semiesfera} = \frac{1}{3} \cdot V_{cilindro} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

El volumen de la esfera es el doble del de la semiesfera:

$$V_{esfera} = 2 \cdot V_{semiesfera} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

El volumen de la esfera es igual a cuatro tercios del producto $\pi \cdot r^3$:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$



El volumen de la cuña esférica es proporcional al número de grados que forman los planos de la cuña. Si el ángulo mide n°, el volumen será:

$$V_{cuña} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \frac{n°}{360°}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **En un cubo de 10 cm de arista lleno de agua se mete una bola de mármol, la mayor que quepa. ¿Qué cantidad de agua queda sin desparramar?**

Volumen del agua del cubo: $10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

Volumen de la bola: $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 125 = 523{,}33 \text{ cm}^3$

Agua sin desparramar: $1\,000 - 523{,}33 = 476{,}67 \text{ cm}^3$

3 Área de la superficie esférica

En la foto aparece la famosa esfera bioclimática de la Expo '92 en Sevilla. En realidad no es una esfera, sino una aproximación. La superficie está formada por decenas de pequeños triángulos que dan la sensación de una esfera casi perfecta.

Si unimos cada vértice de los triángulos con el centro de la esfera se forman decenas de pirámides triangulares cuyo volumen es también, aproximadamente, el volumen de la esfera.

Designamos por:

- B_1, B_2, B_3, ... B_n el área de los triángulos de la esfera bioclimática;
- h la altura de las pirámides que se obtienen al unir los vértices con el centro de la esfera.

El volumen de la esfera, V, será aproximadamente:

$$\frac{B_1\,h}{3} + \frac{B_2\,h}{3} + \frac{B_3\,h}{3} + \ldots + \frac{B_n\,h}{3} = \frac{(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n)\,h}{3}$$

Hacemos el número de triángulos cada vez mayor. Observa lo que ocurre:

- las alturas de las pirámides se aproximan al radio, R, de la esfera;
- la suma de las áreas de las bases de las pirámides se aproxima al área, S, de la superficie esférica.

Luego el volumen será $V = \dfrac{S \cdot R}{3}$

Igualando este valor de V con el obtenido en la pregunta anterior, resulta:

$$\frac{S \cdot R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{de donde} \quad S = 4\pi R^2$$

Área de la superficie esférica $= 4\pi R^2$

ESFERA BIOCLIMÁTICA

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Calcular el área de la superficie de una esfera de 8 cm de radio.**

$S = 4\,\pi\,8^2 = 256\,\pi = 804{,}25$ cm^2

3 **Calcular el área de la superficie de la Tierra suponiendo que es una esfera perfecta de 6 370 km de radio.**

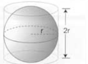
$S = 4\,\pi\,6\,370^2 = 509\,904\,364$ km^2

4 **Si la superficie de una pelota mide 1 525 cm^2, ¿cuánto mide su radio?**

$S = 4\,\pi\,R^2 = 1\,525$

$R = \dfrac{\sqrt{1\,525}}{4\,\pi} = \sqrt{121{,}36} \approx 11$ cm

4 Áreas de figuras esféricas



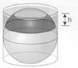
En el epígrafe 2 hemos visto la relación entre el volumen de la esfera y el volumen del cilindro que se ajusta por completo a ella, es decir, que tiene por diámetro de la base 2r, y por altura, también 2r.

1. Volumen de la esfera $= \dfrac{2}{3}$ del volumen del cilindro

¿Qué relación existe entre las áreas? Es fácil comprobar:

2. Área de la esfera = Área lateral del cilindro $= 4\pi r^2$

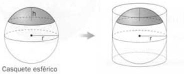
La última relación entre el cilindro y la esfera es realmente curiosa:



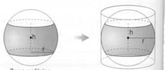
3. **La superficie determinada en la esfera por dos planos paralelos a la base del cilindro y que la cortan es igual a la superficie correspondiente del cilindro.**

Arquímedes descubrió estas relaciones entre el cilindro y la esfera hace más de veintidós siglos. Quedó tan sorprendido por sus resultados que, según cuenta la leyenda, mandó grabar en su tumba la figura de una esfera dentro de un cilindro.

Como consecuencia del resultado 3 el área del casquete y de la zona esférica es igual a la del cilindro que tiene por base $2\pi r$ y altura h, que es la distancia entre los planos que los determinan.



Casquete esférico



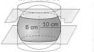
Zona esférica

El área del casquete esférico y de la zona esférica es igual $2\pi r \cdot h$

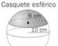
El **área del huso esférico** es proporcional al número de grados que forman los planos del huso. Si el ángulo mide n°, el área será:

$$S_{huso} = 4\pi r^2 \cdot \frac{n^\circ}{360^\circ}$$

Zona esférica



Casquete esférico



EJERCICIOS RESUELTOS

5 **En una esfera que tiene por radio 10 cm está determinada una zona esférica por dos planos cuya distancia es 6 cm. ¿Cuánto mide la superficie? ¿Y la de un casquete cuya altura fuera también 6 cm?**

Las dos superficies son iguales puesto que la altura es la misma.

Área de la zona = Área del casquete $= 2\pi \cdot 10 \cdot 6 = 120\pi$ cm²

5 La Tierra: meridianos y paralelos

Los elementos de la superficie esférica se estudian ahora sobre la superficie terrestre. Los conceptos son los mismos, pero su uso más cotidiano ayuda a reconocerlos y comprenderlos mejor.

Meridianos y husos

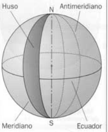
Meridianos: Son circunferencias máximas que pasan por los polos.

Los meridianos: En la red geográfica, son semicircunferencias máximas cuyos extremos coinciden con los polos de la Tierra. Representan un arco de circunferencia de 180°. La semicircunferencia máxima opuesta a un meridiano y situada en el mismo plano que él pasa por los polos y se llama **antimeridiano**.

Los meridianos son perpendiculares al ecuador.

Por cualquier punto de la superficie esférica pasa un solo meridiano, salvo en los polos, por donde pasan todos.

Huso: Es cada una de las partes de la superficie esférica limitada por dos meridianos. El ángulo determinado por un huso es el formado por los planos que contienen a los meridianos.



Paralelos y zonas

Paralelos: Son circunferencias sobre la superficie terrestre tales que el plano que las contiene es perpendicular al eje de la Tierra.

El único paralelo que es circunferencia máxima es el ecuador.

Por cualquier punto de la superficie terrestre, salvo por los polos, pasa un paralelo.

El radio de los paralelos decrece a medida que nos aproximamos a los polos.

Zona: Es la parte de superficie terrestre comprendida entre dos paralelos.

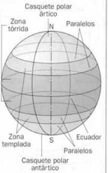
En la Tierra se consideran las:

— zonas tórridas, limitadas por el ecuador y los trópicos;

— zonas templadas, limitadas por los trópicos y los círculos polares.

Casquete: Es cada parte de la superficie terrestre determinada por un paralelo y el polo más próximo.

En la Tierra, los casquetes polares están determinados por los paralelos llamados círculos polares, ártico y antártico.



EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Calcula los ángulos de los husos iguales determinados por:**

a) 15 meridianos **b) 24 meridianos** **c) 45 meridianos**

a) Los 15 husos tienen 360°; por tanto, un huso medirá: $\dfrac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

b) Los 24 husos tienen 360°, un huso medirá: $\dfrac{360^\circ}{24} = 15^\circ$

c) Los 45 husos tienen 360°, un huso medirá: $\dfrac{360^\circ}{45} = 8^\circ$

6 Coordenadas geográficas

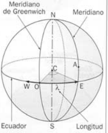
Sistema de coordenadas geográficas

Para determinar la posición de un punto sobre la superficie terrestre se utiliza una red parecida a la cuadrícula que empleamos para determinar un punto en el plano, solo que en este caso en lugar de usar rectas se utilizan meridianos y paralelos.

Los elementos que determinan el **sistema de coordenadas geográficas** son similares a los del plano cartesiano.

Los ejes: Se toma como eje horizontal el ecuador y como eje vertical el meridiano que pasa por Greenwich.

El origen de coordenadas: Es el punto de intersección del ecuador con el meridiano de Greenwich.



Coordenadas geográficas de un punto

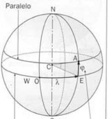
Longitud geográfica

Los meridianos se designan por su distancia angular (en grados) al meridiano de Greenwich, diferenciando meridianos al este (derecha) y meridianos al oeste (izquierda).

La **longitud de un punto A** es la medida angular (en grados) del arco determinado en el ecuador por el meridiano del lugar y el meridiano de Greenwich.

La longitud se mide de 0° a 180° en dirección este y de 0° a 180° en dirección oeste.

Todos los puntos de un mismo meridiano tienen la misma longitud.



Latitud geográfica

Los paralelos se designan por su distancia angular al ecuador añadiendo si están por encima o por debajo, es decir, paralelos al norte o paralelos al sur.

La **latitud de un punto A** es la medida angular (grados) del arco determinado en el meridiano del lugar por el ecuador y el paralelo del lugar.

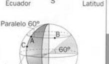
La latitud se mide de 0° a 90° en dirección norte y de 0° a 90° en dirección sur.

Todos los puntos de un mismo paralelo tienen la misma latitud.

Un punto de la superficie terrestre se expresa así:

— París (3,35° E, 48,85° N).

— Río de Janeiro (43° W, 23° S).



EJERCICIOS RESUELTOS

7 **El punto A de la Tierra está en el paralelo 60°. ¿Cuál es la latitud del punto B de la figura? ¿Qué relación existe entre las longitudes de A y C?**

La latitud de A y B es la misma, ya que están en el mismo paralelo.

La longitud de A y C es la misma, ya que están en el mismo meridiano.

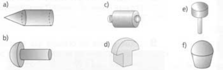
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Leer detenidamente el enunciado.
- Descomponer el problema en partes más sencillas y estudiar cada una de ellas.
- Calcular cada una de las partes y recomponer el problema.

PROBLEMA

Dados los siguientes cuerpos, indicar cuáles son los cuerpos simples que permiten calcular el área y el volumen:



DESCOMPONER EL PROBLEMA EN PARTES MÁS SENCILLAS Y ESTUDIAR CADA UNA DE ELLAS

- Observar detenidamente cada cuerpo. Todos estos cuerpos compuestos están formados por cuerpos simples.

  A continuación se hace el despiece de cada uno de los cuerpos simples estudiados.

  a) Un cono y un cilindro de radios iguales.

  b) Una semiesfera y un cilindro de radio mucho menor que el de la esfera.

  c) Un cilindro y dos esferas pequeñas.

  d) Un semicilindro y un ortoedro.

  e) Un cilindro grande y otro pequeño.

  f) Un tronco de cono y una semiesfera. El radio de la semiesfera es igual al radio mayor del tronco del cono.

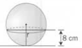
CALCULAR CADA UNA DE LAS PARTES Y RECOMPONER EL PROBLEMA

- Si hubiera datos se procedería a continuación a calcular las áreas y volúmenes de los cuerpos simples y luego se sumarían los valores obtenidos para obtener las áreas y volúmenes de los cuerpos originales.

Ejercicios para entrenarse

1 Una bola de 10 cm de radio se corta a 8 cm del punto de contacto con del suelo.

a) Calcula el radio del círculo que forma la sección.
b) Calcula el área del casquete esférico



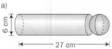
2 Calcula cuánto vale el ángulo que forman los planos que determinan un huso horario.

3 Los planos que determinan una cuña forman un ángulo de 72°. ¿Cuántas cuñas iguales hay en la esfera?

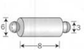
4 ¿Cuántas veces mayor es el área de una esfera que la de uno de sus círculos máximos?

5 Calcula el volumen de las siguientes figuras:

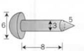
a)



b)



c)



6 ¿Cuál es el radio de una esfera cuya área es numéricamente igual a la longitud de una de sus circunferencias máximas?

7 Calcula el área y el volumen de las esferas cuyos diámetros miden:

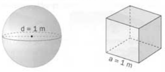
a) 8 cm
b) 20 cm
c) 16 cm
d) 12 cm

8 La superficie de una pelota mide 1 256 cm^2. ¿Cuánto mide el radio? Toma como valor $\pi = 3,14$.

9 Calcula el área del casquete que se obtiene al cortar una esfera de 60 cm de diámetro por un plano que pasa a 20 cm del centro.

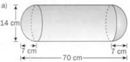
10 Calcula el área de una esfera de radio 1 m y la de un cubo de arista 1 m.

¿Qué superficie tiene más área? ¿En cuántos centímetros cuadrados supera una a la otra?

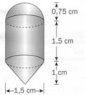


11 Calcula el volumen de los cuerpos representados en la figura.

a)



b)



PROBLEMAS PARA APLICAR

12 Un depósito esférico mide 12 m de diámetro. ¿Cuántos bidones cilíndricos de 1 m de altura y 60 cm de diámetro pueden llenarse con el líquido almacenado en el depósito?

13 Cada una de las nueve esferas del Atómium de Bruselas, símbolo de la Expo '58, celebrada en esta ciudad, tiene un volumen de 523,6 m^3. Calcula el valor del radio de la esfera.

14 Un bola de hierro fundido de 1 m de diámetro está colocada como adorno en un parque. ¿Cuántos kilogramos pesa si la densidad del hierro es de 7,25 gramos por cada cm^3?

15 La milla marina es un minuto de meridiano terrestre. ¿A cuántos metros equivale? La circunferencia de la Tierra tiene aproximadamente 40 000 km.

16 Se pela una naranja y se cuentan diez gajos.

a) ¿A qué figura geométrica de la esfera se parecen?

b) Si fueran perfectos, ¿qué ángulo formarían los planos que determinan los gajos?

c) La naranja pelada pesa 180 gramos, ¿cuánto pesa un gajo?

17 En el parque de atracciones de *Walt Disney* de Florida hay una pelota geodésica de 50 metros de diámetro que aparece como una gran esfera. ¿Cuánto mide la superficie esférica? ¿Y su volumen?

18 La Luna tiene aproximadamente 1 740 km de radio. Supuesto que la Luna es esférica, ¿cuánto mide su superficie?

19 El radio de la Tierra mide aproximadamente 6 370 km. Supuesto que la Tierra es esférica, ¿cuánto mide la superficie? ¿Cuántas veces es mayor la superficie de la Tierra que la de la Luna? (Utiliza el resultado del ejercicio anterior.)

CUESTIONES PARA ACLARARSE

20 La circunferencia y la esfera tienen dos definiciones casi iguales. ¿En qué se diferencian?

21 Un chico, recordando que la circunferencia es el límite de los polígonos regulares cuando el número de lados tiende a infinito, da esta definición: «Esfera es el límite de los poliedros regulares cuando estos tienden a tener infinitas caras». Explica si es correcta esta definición.

22 Define claramente meridianos y paralelos. ¿Hay algún paralelo que mida lo mismo que un meridiano?

23 El área de la zona esférica es igual a la circunferencia máxima por la altura. Si la altura es el diámetro, ¿cuál es su área? ¿Y si la altura es el radio? Di en cada caso de qué figura esférica se trata.

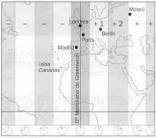
A C T I V I D A D E S

24 Distingue entre huso esférico y huso horario. ¿Cuántos husos horarios hay en la superficie esférica? ¿Cuánto vale el ángulo del huso horario?

25 ¿Cuál es el lugar de la Tierra que tiene 0° de longitud y 0° de latitud?

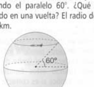
26 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de la Tierra que tienen la misma longitud? ¿Y los que tienen la misma latitud?

27 Un alumno dice que solamente hay 24 meridianos, los correspondientes a los husos horarios. ¿Es cierta su afirmación?



ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

28 Un cohete crucero va a ras de tierra y rodea la Tierra siguiendo el paralelo 60°. ¿Qué camino habrá recorrido en una vuelta? El radio de la Tierra es 6 370 km.



29 El radio de una esfera es 10 cm. ¿Cuál es la altura de un casquete esférico cuya área es la cuarta parte de la superficie esférica?

30 El área de una zona esférica o casquete es igual a la circunferencia máxima por la altura. ¿Qué paralelo divide a cada uno de los dos hemisferios en dos partes iguales?

31 Imagina por un momento la Tierra como una bola de acero perfecta. Si envolviéramos la anterior bola con un gran plástico, ¿cuánto debería aumentar la superficie del plástico si el radio aumentase un metro? Piensa y luego responde: ¿Depende del radio este incremento de superficie?

32 Comprueba que el paralelo 60° mide la mitad que el ecuador.

33 Calcula el radio del paralelo cuya latitud es 30°.

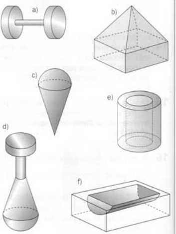
34 Un paralelo tiene de radio 3 185,5 km. ¿Cuál es su latitud? Radio medio de la Tierra: 6 370 km.

35 Las coordenadas geográficas de dos ciudades son A(10° E, 60° N) y B(20° E, 60° N). Calcula la distancia entre ellas siguiendo el paralelo en que se encuentran.
Radio de la Tierra ≈ 6 370 km.

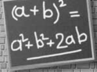
36 Dados los puntos A(10° E, 45° N) y B(20° E, 45° N), calcula la distancia siguiendo el paralelo.

37 Las coordenadas geográficas de dos ciudades A y B son: A(40° E, 62° N), B(40° E, 52° S). Calcula la distancia entre estas dos ciudades.

38 Efectúa el despiece de los siguientes cuerpos.



MURAL DE MATEMÁTICAS



BUENAS NOCHES, BUENOS DÍAS

Rusia es un país inmenso, el más grande de la Tierra. Su extensión es de algo más de 17 millones de kilómetros cuadrados (es decir, que cabrían dentro 34 Españas).

Desde la frontera europea del oeste hasta su extremo este en el estrecho de Bering, que separa Asia de Alaska, hay unos 15 000 kilómetros. Por eso las diferencias horarias entre unos puntos y otros del país son enormes.

Cuando los habitantes de la zona europea se están acostando (a las 23.00 horas), en la costa del Pacífico hace ya rato que empezaron un nuevo día (son las 8.00 de la mañana).

¿LO SABÍAS?

Si consideramos el universo como una inmensa esfera, su radio aproximado es de $1{,}42 \times 10^{26}$ metros.

Galería de retratos
ERATÓSTENES

Hoy día, gracias a las mediciones efectuadas por los satélites conocemos la Tierra palmo a palmo y podemos saber con precisión casi milimétrica cuál es su tamaño. Pero hace veintitrés siglos no era tan fácil.

Eratóstenes (nacido hacia el año 276 a.C. en la actual Libia) consiguió medir la Tierra con una exactitud que hoy nos parece asombrosa.

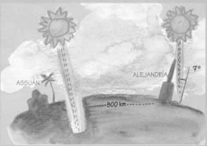
Y no fue su único mérito. Como otros sabios de su época, no se conformó con una rama del saber: fue astrónomo, geógrafo, historiador, literato…

La criba

… y matemático: a él se debe la "criba de Eratóstenes", un sistema para determinar números primos.

Todos esos conocimientos y su gran reputación hicieron que el rey de Egipto lo eligiera para dirigir la Biblioteca de Alejandría, en la que se guardaba todo el saber de su época.

A los ochenta años, ciego y cansado, se dejó morir por inanición.



¿CÓMO LO HIZO?

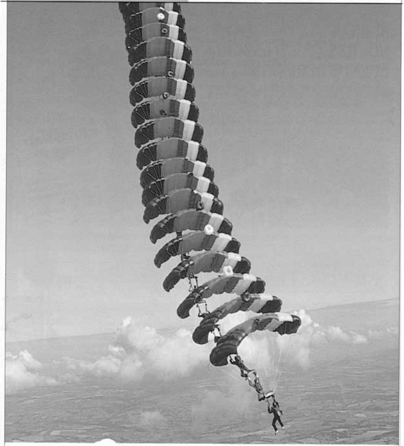
Eratóstenes observó que a mediodía de un determinado día de verano, los rayos solares iluminaban el fondo de un pozo en Assuán: es decir, que la inclinación del sol era nula. En cambio, ese mismo día los rayos solares caían sobre Alejandría con una inclinación de algo más de 7 grados.

Dedujo que esa diferencia se debía a la curvatura de la Tierra entre ambas ciudades.

Como conocía la distancia que las separa (unos 800 kilómetros) pudo calcular, partiendo de la base de que la Tierra era esférica, el diámetro de nuestro planeta: 40 000 kilómetros. Prácticamente la medida que conocemos hoy día con todos los avances técnicos. Sorprendente, ¿verdad?

Traslaciones y giros

14

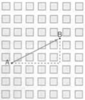


Muchas de las figuras del plano o del espacio pueden considerarse como partes repetidas, de modo que realizada una, las otras se pueden obtener trasladando la figura modelo. Las cenefas, los frisos, los pavimentos y los mosaicos son ejemplos corrientes de traslaciones.

El desplazamiento multicolor de los paracaidistas da una idea intuitiva de traslación. Cada paracaidista parece una copia del superior; las distancias en las distintas posiciones se mantienen constantes...

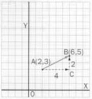
1 Vectores en el plano

Imagina una ciudad en la que las calles forman una cuadrícula perfecta. Un taxista toma a un viajero en el cruce A y lo traslada al cruce B. ¿Cómo podemos determinar este trayecto?



Para situar cada cruce es necesario fijar en el plano de la ciudad dos calles principales: una horizontal y otra vertical que se corten en un cruce O. La recta horizontal es el eje de abscisas y la recta vertical el eje de ordenadas. El punto donde se cortan es el origen.

Observa ahora que para pasar del cruce A al cruce B hay que desplazarse cuatro manzanas (unidades) hacia la derecha y dos manzanas (unidades) hacia arriba. Por tanto, el trayecto $\overline{AB}$ está determinado por el par de números (4, 2), y escribiremos: $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$.



Por convenio, se escribe primero el recorrido horizontal, $\overrightarrow{AC}$, y después el vertical, $\overrightarrow{CB}$.

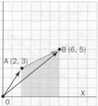
Conociendo las coordenadas del origen A(2, 3) y del extremo B(6, 5), las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ se calculan así: $\overrightarrow{AB} = (6, 5) - (2, 3) = (4, 2)$.

Las coordenadas o componentes de un vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x', y') - (x, y) = (x' - x, y' - y)$$

El vector que tiene por origen el origen de coordenadas y por extremo un punto A se llama **vector de posición** del punto A.

Las coordenadas de un punto coinciden con las componentes de su vector de posición. Observa en el dibujo que el vector de posición del punto A(2, 3) es el vector $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$.

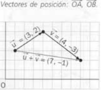


Vectores de posición: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

Suma de vectores

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (4, -3)$ el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ se obtiene sumando las componentes correspondientes:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (4, -3) = (7, -1)$$



Dados los vectores $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$, se llama **vector suma** al que tiene por primera componente la suma de las primeras componentes y por segunda componente la suma de las segundas componentes:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

EJERCICIOS RESUELTOS

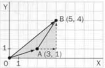
1 **Dados los puntos A(3, 1) y B(5, 4), escribir las coordenadas de los vectores de posición de los puntos y calcular las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. ¿Cómo son entre sí estos vectores?**

Vectores de posición: $\overrightarrow{OA} = (3, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (5, 4)$

— Vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (5, 4) - (3, 1) = (2, 3)$

— Vector $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} = (3, 1) - (5, 4) = (-2, -3)$

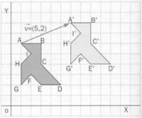
Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ son opuestos; sus coordenadas son opuestas.



2 Traslación en el plano

Coordenadas de los puntos de la pajarita azul	Coordenadas de los puntos de la pajarita amarilla
A (1, 6)	A' (6, 8)
B (3, 6)	B' (8, 8)
C (3, 4)	C' (,)
D (5, 2)	D' (,)
E (3, 2)	E' (,)
F (,)	F' (,)
...	...
P (x, y)	P' (x', y')

La pajarita amarilla se ha obtenido desplazando la pajarita azul según el vector $\vec{u} = (5, 2)$.



Completa la tabla del margen con los puntos más significativos de la pajarita azul y sus correspondientes de la pajarita amarilla.

¿Qué relación existe entre las coordenadas de un punto y las de su transformado? Si a la abscisa de un punto le sumamos 5 y a la ordenada le sumamos 2, obtenemos las coordenadas del punto transformado. Pero (5,2) son las coordenadas del vector guía, luego:

$$A(1, 6) \;\rightarrow\; \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \vec{u} = (1, 6) + (5, 2) = (6, 8) \;\rightarrow\; A'(6, 8)$$

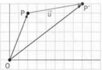
Generalizando este resultado, si $\vec{u} = (a, b)$ se tiene:

$$P(x, y) \;\rightarrow\; P'(x + a, y + b)$$

Ya que: $\quad \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{u} = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$

La transformación geométrica que permite pasar de la pajarita azul a la amarilla se llama traslación. El vector $\vec{u}$ se llama **vector guía** de la traslación o **vector de traslación**.

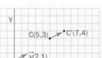
Los puntos que se corresponden en una traslación se llaman **homólogos**.

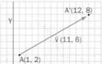


$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{u}$

> Una traslación de vector guía $\vec{u} = (a, b)$, transforma un punto P(x, y) en otro punto P'(x', y') tal que
>
> $$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{u}$$
>
> es decir,
>
> $$(x', y') = (x, y) + (a, b)$$

Así pues, las coordenadas de cada punto de la figura trasladada se obtienen sumando a las coordenadas del punto homólogo las coordenadas del vector de traslación.





EJERCICIOS RESUELTOS

2 En una traslación de vector guía $\vec{v} = (2, 1)$ se sabe que el transformado del punto C es el punto C'(7, 4). Hallar las coordenadas del punto C.

Sean (x, y) las coordenadas del punto C. Sustituyendo en la ecuación de la traslación, se tiene: $(7, 4) = (x, y) + (2, 1)$.

Resolviendo: $\quad x = 5,\; y = 3$. Por tanto: $\quad C(5, 3)$.

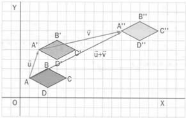
3 ¿Cuáles son las coordenadas del vector guía de la traslación que hace corresponder al punto A(1, 2) el punto A'(12, 8)?

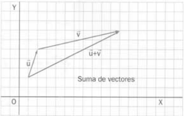
El vector guía de la traslación será el $\vec{v} = (a, b)$. Sustituyendo en la ecuación de la traslación, se tiene: $\quad (12, 8) = (1, 2) + (a, b)$.

Resolviendo: $\quad a = 11,\; b = 6$. Por tanto: $\quad \vec{v} = (11, 6)$.

3 Traslaciones sucesivas

El rombo ABCD de la figura tiene por coordenadas de los vértices A(1, 2), B(3, 3), C(5, 2) y D(3, 1). En la figura aparece el trasladado del rombo ABCD en una traslación de vector guía $\vec{u} = (1, 3)$, y a continuación el trasladado de este último en una traslación de vector guía $\vec{v} = (9, 2)$.





¿Qué coordenadas tiene el vector guía de una traslación que transforma el rombo ABCD en el rombo A"B"C"D"?

Tomemos los vértices correspondientes en las traslaciones: A ⟶ A' ⟶ A".

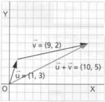
Por definición de traslación:

$$\overline{OA''} = \overline{OA'} + \vec{v} = (\overline{OA} + \vec{u}) + \vec{v} = \overline{OA} + (\vec{u} + \vec{v})$$

El mismo resultado se obtiene con los tres vértices restantes.

Por tanto, para pasar de A a A" basta aplicar la traslación de vector guía:

$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 3) + (9, 2) = (10, 5)$$

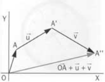


La aplicación sucesiva de dos traslaciones de vectores guías $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otra traslación determinada por el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$.

Vectores: $\overline{OA''} = \overline{OA} + \vec{u} + \vec{v}$

Coordenadas: $(x'', y'') = (x, y) + (a, b) + (a', b')$

La aplicación sucesiva de traslaciones se llama también producto de traslaciones.

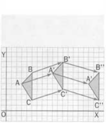


Ejercicios resueltos

4 **Las coordenadas de los vértices del triángulo ABC son A(3, 5), B(5, 7) y C(5, 2). Hallar los vértices del triángulo obtenido aplicando sucesivamente las traslaciones de vectores guía $\vec{u} = (6, 2)$ y $\vec{v} = (7, -2)$.**

El vector de la traslación producto es $\vec{u} + \vec{v} = (13, 0)$.

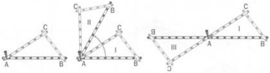
$$\overline{OA''} = \overline{OA} + \vec{u} + \vec{v} = (3, 5) + (13, 0) = (16, 5)$$
$$\overline{OB''} = \overline{OB} + \vec{u} + \vec{v} = (5, 7) + (13, 0) = (18, 7)$$
$$\overline{OC''} = \overline{OC} + \vec{u} + \vec{v} = (5, 2) + (13, 0) = (18, 2)$$



4 Idea de giro en el plano

❖ El centro de giro pertenece a la figura

El triángulo ABC está hecho de varillas. Se ha clavado a un tablero en el punto A mediante una chincheta. El triángulo puede moverse, permaneciendo fijo el punto A. Las siguientes figuras indican algunas posiciones del triángulo al girar el tablero:



Si el triángulo gira 60°, pasa de la posición I a la posición II.

Si gira 180°, pasa de la posición I a la posición III.

En estos giros, todos los puntos del triángulo cambian de situación, salvo el punto A, que coincide con el centro de giro.

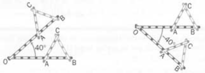
LOS ÁNGULOS TIENEN SENTIDO

Sentido positivo: el contrario al movimiento de las agujas de un reloj.

Sentido negativo: el de las agujas de un reloj.

❖ El centro de giro no pertenece a la figura

Las siguientes ilustraciones muestran ahora cómo se gira una figura cuando el centro de giro no pertenece a la misma. Si imaginamos que el triángulo está hecho de varillas y fijo también a la varilla $\overline{OA}$, entonces girar la figura es girar la varilla el ángulo dado:



Todos los puntos del triángulo cambian de situación; aquí no permanece ningún punto fijo, tal como sucede cuando el centro pertenece a la figura.

EJERCICIOS RESUELTOS

5 **Una noria de 20 m de radio tiene 24 cestillas.**

a) ¿Qué ángulo tiene que girar para que la cestilla que está a ras de suelo se coloque a media altura? ¿Y a máxima altura?

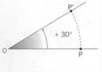
b) ¿Qué ángulo tiene que girar para que una cestilla se coloque en el mismo lugar que la que le precede?

a) Para que una cestilla que está a ras de suelo se coloque a media altura tiene que girar 90° ó 270°.
Para que se coloque a máxima altura tiene que girar 180°.

b) El ángulo que forman los radios de las cestillas es 360°: 24 = 15°. Para pasar de una posición a la siguiente hay que girar 15°.

5 Los giros como transformación geométrica

El compás es la herramienta adecuada para poder girar un punto. Debemos imaginarnos el punto como algo material unido al extremo de un compás. En la primera figura, con centro en el punto O giramos el punto P un ángulo de 30°:



Para ello se procede así:

— Con centro en O y radio $\overline{OP}$, se traza un arco.

— Tomando como lado OP y sentido positivo, se construye con el transportador un ángulo de 30°.

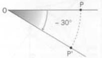
— La recta OQ' corta al arco en el punto P'.

Por tanto, $\overline{OP} = \overline{OP'}$ y $\widehat{POP'} = 30°$.

El punto P' se dice que es el transformado del punto P en un giro de centro O y ángulo de giro 30°. Se escribe:

$$g_{(O,\ 30°)}\ (P) = P'$$

En la segunda figura se ha construido de modo análogo el giro de un punto P tomando como ángulo $-30°$ (sentido negativo).



Un giro de centro O y ángulo α transforma un punto P del plano en otro punto P' del plano tal que:

$$\overline{OP} = \overline{OP'} \quad \text{y} \quad \widehat{POP'} = \alpha$$

- El punto P' se llama homólogo de P.
- El giro se designa por $g_{(O,\ \alpha)}\ (P) = P'$.
- El ángulo de giro se llama también amplitud.

Transformar una figura en otra es transformar cada uno de sus puntos.

Ejercicios resueltos

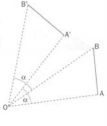
6 **En las siguientes figuras, indicar el centro y los ángulos de giro α que transforman a cada una de ellas en sí misma.**

a) Centro de giro O. Ángulos de giro: 90°, 180°, 270°, 360°.

b) Centro de giro O. Ángulos de giro: 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°.

c) Centro de giro O. Ángulos de giro: 120°, 240°, 360°.

6 Figuras homólogas mediante un giro



❖ Homólogo de un segmento mediante un giro

En la figura aparecen dos puntos A y B y sus homólogos A' y B' mediante un giro de centro O y ángulo α.

Los triángulos: OAB y OA'B' son iguales, por tener:

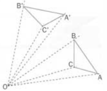
— El lado $\overline{OA}$ igual que el lado $\overline{OA'}$.

— El lado $\overline{OB}$ igual que el lado $\overline{OB'}$.

— Los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'OB'}$ son iguales, pues ambos son iguales a $\widehat{AOB'} - \alpha$.

Al ser iguales los triángulos, el lado $\overline{AB}$ debe ser igual al lado $\overline{A'B'}$.

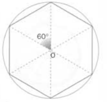
> Los giros transforman segmentos en segmentos iguales.



❖ Homólogo de un triángulo mediante un giro

El triángulo A'B'C' de la figura del margen es el girado de ABC. Por la propiedad anterior, los lados de los triángulos son iguales, luego los triángulos tienen iguales sus ángulos.

> Los giros transforman triángulos en triángulos iguales.
> Los giros conservan los ángulos.



❖ Figuras invariantes por un giro

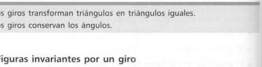
Si un giro transforma una figura en sí misma, se dice que es invariante.

Por ejemplo, dada una circunferencia, si se toma su centro como centro de giro siempre se transforma en sí misma para cualquier ángulo.

Un hexágono se transforma en sí mismo cuando se toma como centro el del hexágono y como ángulo de giro 60°, 120°, 180°, 240°, 300° y 360°.

EJERCICIOS RESUELTOS

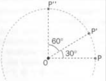
7 **En cada una de las siguientes rosetas, buscar el centro de giro y los posibles giros que dejan invariante la roseta:**



Los centros de giro son los centros de las figuras. Ángulos de giro:

a) 180° k; b) 60° k, y c) 90° k, siendo k un número entero.

7 Giros sucesivos



Recordemos que para girar una figura se gira cada uno de los puntos. Por tanto, para definir los giros sucesivos basta saber cómo se hallan los homólogos sucesivos de un punto.

❖ De igual centro

Sea P el punto, O el centro de giro y 30° y 60° los ángulos de giro.

— Con centro en el punto O giramos el punto P un ángulo de 30° y obtenemos el punto P'.

— A continuación, con el mismo centro O giramos el punto P' un ángulo de 60° y obtenemos el punto P''.

Esta aplicación sucesiva de giros es equivalente a un giro con el mismo centro en O y ángulo de giro igual a la suma 30° + 60°.

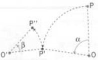
La aplicación sucesiva de giros de centro en O y amplitudes α y β es otro giro de centro en O y amplitud $\alpha + \beta$.

Cuando los giros se realizan en sentido contrario, su amplitud será en uno positiva y en el otro negativa.

Si se aplica, por ejemplo, un giro de 50° y después otro de −70°, el resultado será equivalente a un giro de 50° + (−70°) = −20°.

❖ De distinto centro

En las siguientes figuras se aplican sucesivamente dos giros de distinto centro a un punto P:



— Con centro en el punto O giramos el punto P un ángulo de 80° y obtenemos el punto P'.

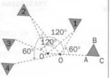
— A continuación, con centro en el punto O' giramos el punto P' un ángulo de 40° y obtenemos el punto P''.

EJERCICIOS RESUELTOS

8 **En la figura siguiente, determinar en qué se transforma el triángulo ABC después de aplicarle sucesivamente:**
Un giro de centro en O y amplitud 60° y otro giro de centro en O' y amplitud 120°. ¿Y si se aplican en orden inverso?

Aplicando primero $g_{(O,\ 60°)}$ se obtiene el triángulo 1, y al aplicarle a este el giro $g_{(O',\ 120°)}$ se obtiene el triángulo 3.

Si se hace en orden inverso, se obtiene primero el triángulo 2 y después el triángulo 4.



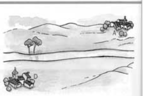
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Dibujar y estudiar la situación.
- Utilizar la traslación.
- Emplear la imagen trasladada.

PROBLEMA

Los pueblos de Aranda y Dobro están separados por un tramo recto del río Nela. Sus habitantes quieren construir una carretera que una los dos pueblos. Si el puente ha de ser perpendicular a las orillas del río, ¿se podría indicar gráficamente el camino más corto?

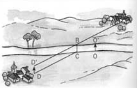


DIBUJAR Y ESTUDIAR LA SITUACIÓN

- El puente sobre el río Nela es una parte fija de la longitud; es decir, si no existiera el río, la distancia entre los pueblos sería la actual menos la anchura del río.

UTILIZAR LA TRASLACIÓN

- Supongamos que el puente ocupa la posición CB.
  Si trasladamos la orilla del río según el vector $\overrightarrow{OO'}$ el pueblo de Dobro se traslada al punto D': $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{DD'}$. El problema se reduce ahora a trazar la carretera desde el pueblo de Aranda hasta el pueblo de Dobro con la condición impuesta en el problema.



EMPLEAR LA IMAGEN TRASLADADA

- Veamos cómo se resuelve ahora el problema.
  Puesto que la longitud de la carretera ha de ser mínima, basta unir Aranda con D', pueblo de Dobro trasladado. La recta corta a la orilla en B.
  Conocido el punto B, el puente ocupará la posición perpendicular BC.
  El camino es A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D.
  Este camino es mínimo, ya que el trayecto real $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ coincide con el trayecto trasladado $\overline{AB} + \overline{BD'} + \overline{DD'}$, que es mínimo.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Representa en el plano de coordenadas:

a) Los vectores $\vec{u} = (3, 1)$; $\vec{v} = (1, 5)$; $\vec{w} = (4, 0)$.
b) Los vectores de posición de los puntos A(1, 3), B(5, 3), C(6, 2).

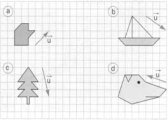
2 Dados los vectores $\vec{u} = (4, 3)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ y $\vec{w} = (5, 0)$, calcula las siguientes sumas:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} + \vec{w}$ c) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

3 Halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ determinados por los puntos A(1, −2), B(3, 8), C(−3, 5) y D(−1, 15). ¿Cómo son estos vectores?

4 El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene por coordenadas (4, 0) y las coordenadas del punto B son (1, 2). Halla las coordenadas de A.

5 Dibuja las figuras trasladadas de las siguientes en una traslación de vector guía $\vec{u}$:



6 Una traslación viene determinada por los puntos homólogos P(2, −3) y P′(−5, 1). Halla el vector guía de la traslación.

7 En una traslación de vector guía $\vec{v} = (11, 0)$, halla los vértices del triángulo homólogo de ABO, donde A(−8, −1), B(−5, 2) y O(0, 0). ¿Cómo son los lados de ambos triángulos?

8 Dada la traslación de vector guía $\vec{u} = (5, 4)$, ¿cuáles serán las coordenadas del punto P sabiendo que P′ tiene por coordenadas P′(6, −7)?

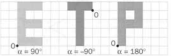
9 Sea P′ el trasladado de P(3, 8) en una traslación de vector guía $\vec{u} = (1, 2)$ y P″ el trasladado de P′ en una traslación de vector guía $\vec{v} = (-1, 8)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P″? ¿Se obtiene el mismo resultado que si transformamos el punto P en una traslación de vector guía $\vec{u} + \vec{v} = (1, 2) + (-1, 8) = (0, 10)$?

10 En una traslación de vector guía $\vec{u} = (2, 1)$ se transforma el punto P(3, 6) en el punto P′ y a continuación se transforma el punto P′ en una traslación de vector guía $\vec{v} = (-2, 1)$ obteniendo el punto P″. Halla el vector guía de la traslación sucesiva de estas dos. ¿Qué coordenadas tendrá el punto P″?

11 Dada una traslación de vector guía $\vec{u} = (3, -4)$ y otra traslación de vector guía $\vec{v} = (1, 7)$, ¿cuál es el vector guía de la traslación sucesiva?

12 Una traslación sucesiva tiene por vector guía $\vec{w} = (4, 6)$. Una de las traslaciones tiene por vector guía $\vec{v} = (3, 1)$. ¿Cuáles son las coordenadas del vector guía de la otra traslación?

13 Utilizando la cuadrícula y haciendo centro en O, y con el ángulo señalado en cada caso, gira cada una de las siguientes letras:



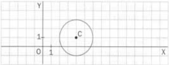
14 En un sistema de coordenadas cartesianas de origen O, dibuja el punto P(3, 1). Halla gráficamente los puntos homólogos y sus coordenadas, siendo los giros:

a) $g_{(O,\ 90°)}$ b) $g_{(O,\ 180°)}$

15 Dibuja en un sistema de coordenadas un segmento de extremos A(5, 2) y B(8, 1). Construye gráficamente el segmento homólogo en un giro de centro el origen y ángulo 90° y señala las coordenadas de estos extremos.

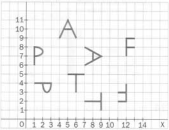
16 Dada la recta r de la figura, construye la recta homóloga en un giro de centro el punto O y ángulo 45°.

17 Dada la circunferencia de centro C(4, 1) y radio r = 2, representada en la figura, halla gráficamente su homóloga en un giro de centro el origen y ángulo 90° e indica las coordenadas del centro.



18 En un giro de centro el origen y ángulo −30°, halla gráficamente el transformado del punto A(6, 5). ¿Cuál será el transformado del punto A en un giro de centro el origen y ángulo 330°?

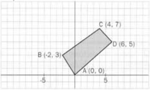
19 Busca el centro de giro que transforma cada letra en otra igual.



PROBLEMAS PARA APLICAR

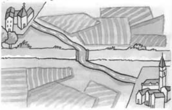
20 Dibuja con regla y compás en una cuadrícula un hexágono regular de lado a = 3 y construye gráficamente su transformado en una traslación de vector guía $\vec{u} = (10, 4)$.

21 En la siguiente figura aparece un cuadrilátero. Comprueba si es un paralelogramo. Si no lo es, debes rectificar las coordenadas del punto D para que lo sea.

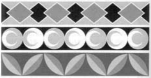


22 Dada la circunferencia de centro C(7, 4) y radio 5, aplícale la traslación de vector guía $\vec{u} = (5, -2)$. ¿Qué circunferencia se obtiene?

23 Los pueblos de Aguilar y Duero están separados por un tramo recto del río Arenillas. Sus habitantes quieren construir una carretera que una los dos pueblos. Si el puente ha de ser perpendicular a las orillas del río, ¿podrías indicar gráficamente el camino sabiendo que las distancias de los pueblos a sus respectivas entradas al puente son iguales?



24 En las siguientes figuras aparecen porciones de varias cenefas o frisos. Todos ellos se pueden construir a partir de una figura simple mediante traslaciones.

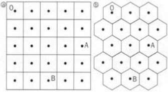


¿Cuál es la figura mínima que da lugar a cada friso?

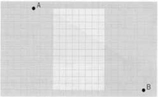
25 En las siguientes figuras se ven dos pavimentos o mosaicos de losetas. Indica un camino posible para ir de la loseta origen O a las losetas A y B.

En la figura a las traslaciones deben ser horizontales y verticales.

En la figura b las traslaciones deben ser horizontales y oblicuas.



26 En la figura se representa una piscina. Un joven se encuentra en el punto A y quiere ir al punto B cruzando a nado y perpendicularmente la piscina. Tomando cada cuadrado como una unidad de longitud, calcula la distancia mínima para ir del punto A al punto B.



27 Representa una circunferencia que tenga su centro en el origen de coordenadas y un radio igual a 5 unidades. A los puntos de la circunferencia, aplícales un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo 90°. ¿Cuáles serán las coordenadas de los homólogos de los puntos B(−5, 0) y C(0, −5)? ¿Cuál será la circunferencia homóloga de la dada en todo giro de centro el origen y un ángulo cualquiera?

28 Dibuja un hexágono regular ABCDEF y halla la figura homóloga en un giro de centro O, centro del hexágono, y amplitud 60°. Si no pusieras letras en los vértices, ¿podrías distinguir entre el primer hexágono y su homólogo? Indica el orden y el ángulo de la simetría rotacional.

29 Dibuja una circunferencia de centro en O y radio 3 cm y marca un punto A en ella. Aplicando sucesivamente giros de 60° se obtienen los puntos homólogos B, C, D, ... ¿Qué clase de figura se obtiene al unir sucesivamente esos puntos? Indica el orden de la simetría rotacional de la figura obtenida.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

30 Dada la figura siguiente, dibuja un vector de traslación que permita transformar un ciclista en el otro:

31 Una traslación lleva el origen de coordenadas al punto A(4, 3). ¿Cuál es el vector guía de la traslación? ¿Con qué vector coincide?

32 Si el vector guía de una traslación es el vector (0, 0), ¿cuáles son las coordenadas del punto A' trasladado del punto A(2, 6)? ¿Cuál sería la figura trasladada de una circunferencia de centro el origen si se aplica esta traslación?

33 Si una recta es paralela al vector guía de una traslación, ¿cuál será la transformada de la recta en dicha traslación?

34 En una traslación de vector guía $\vec{u} = (2, 3)$, ¿hay algún punto que permanezca invariante (que no se mueva)? ¿Y alguna recta?

35 Realizamos una traslación de vector guía $\vec{u} = (1, 8)$. ¿Cómo deberá ser el vector guía de otra traslación para que al aplicarlas sucesivamente los puntos permanezcan invariantes (no se muevan)?

A C T I V I D A D E S

36 Dibuja un triángulo equilátero ABC. ¿Cuál ha de ser el ángulo de un giro con centro en A que transforme B en C?

37 En un giro de centro en O y ángulo 30°, ¿hay algún punto que permanezca invariante, es decir, que no se mueva en el giro? ¿Cuál es el punto transformado del punto O?

38 En un giro de centro en O y ángulo 60°, ¿hay alguna circunferencia que permanezca invariante?

39 Si realizas tres giros consecutivos de centro el punto O y ángulos 45°, 30° y 60°, ¿cuál sería el ángulo de un único giro que produjese el mismo efecto?

40 Si a una figura le aplicamos un giro de centro en O y ángulo 120° y a continuación aplicamos un nuevo giro de centro en O y ángulo α, ¿qué valor mínimo debe tener para que al realizar los dos giros la figura permanezca invariante?

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

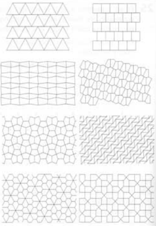
41 Halla el trasladado del segmento de extremos A(4, 8) y B(1, 4) en una traslación de vector guía $\vec{v} = (4, 6)$. Comprueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ son equipolentes.

42 Prueba que en toda traslación un triángulo cualquiera ABC y su trasladado A'B'C' son iguales.

43 Prueba que en cualquier traslación el ángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y sus trasladados $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{A'C'}$ son iguales.

44 Dado el cuadrado de vértices O(0, 0), A(3, 0), B(3, 3) y C(0,3), halla las coordenadas de su trasladado en una traslación de vector guía $\vec{v} = (2, 2)$. ¿Cómo son ambos cuadrados?

45 De los pavimentos o mosaicos siguientes, indica cuál es la figura más pequeña que mediante traslaciones da lugar a todo el pavimento.



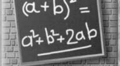
46 Dada la figura siguiente, comprueba que la aplicación sucesiva de los giros de centro en O y O' y ángulo 180° es una traslación de vector $2\,\overrightarrow{OO'}$.

47 Los giros de la siguiente tabla se aplican sucesivamente a un triángulo equilátero ABC, siendo O el centro del triángulo. Completa la tabla:

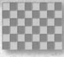
	$g_{(O,\,120°)}$	$g_{(O,\,240°)}$	$g_{(O,\,360°)}$
$g_{(O,\,120°)}$	$g_{(O,\,240°)}$		
$g_{(O,\,240°)}$			
$g_{(O,\,360°)}$			

48 Los giros de la siguiente tabla se aplican a un cuadrado ABCD, siendo O el centro del cuadrado. Completa la tabla:

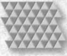
	$g_{(O,\,90°)}$	$g_{(O,\,180°)}$	$g_{(O,\,270°)}$	$g_{(O,\,360°)}$
$g_{(O,\,90°)}$				
$g_{(O,\,180°)}$				
$g_{(O,\,270°)}$				
$g_{(O,\,360°)}$				



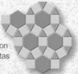
Mosaicos regulares
CON OCHO BASTA



Los mosaicos nos permiten rellenar un plano repitiendo indefinidamente una misma figura. Si esa figura mínima es un polígono regular sólo podremos usar triángulos, cuadrados o hexágonos. Obtendremos mosaicos regulares como estos tres primeros.

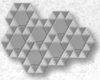


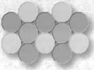
En cambio, si combinas polígonos regulares de varios tipos en un mismo mosaico, las posibilidades son algunas más, en concreto ocho. Estas combinaciones se llaman *mosaicos semirregulares*, y seguro que los has visto muchas veces en paredes, suelos, etc.

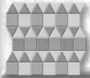


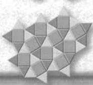
Las combinaciones posibles son las que combinan en cada vértice los siguientes polígonos:

1 hexágono + 1 triángulo + 2 cuadrados
2 octógonos + 1 cuadrado
1 dodecágono + 1 hexágono + 1 cuadrado
2 dodecágonos + 1 triángulo
2 hexágonos + 2 triángulos
1 hexágono + 4 triángulos
2 cuadrados + 3 triángulos
(esta última puede combinarse de dos formas)









Dejar volar la fantasía

Los mosaicos anteriores pueden llegar a ser muy bonitos, pero a **Maurits Cornelius Escher**, pintor holandés con una imaginación desbordante, se le ocurrió que habría alguna forma de crear otros más divertidos y variados. Y, en realidad, es muy fácil. Tú mismo puedes hacerlo. Toma como figura mínima, por ejemplo, un cuadrado. Ahora modifícalo de forma compensada; es decir, corta la forma que tú quieras de uno de sus lados y ponlo en el contrario. Ya tienes una nueva figura mínima con la que podrás hacer un mosaico único y a tu medida.

Figuras **sí**, personas **no**

Los arquitectos y decoradores árabes son auténticos maestros en caligrafía (el arte de escribir con letras muy bellas) y en la decoración con mosaicos y figuras geométricas. ¿Sabes por qué?

La religión islámica no permite que al decorar las paredes se reproduzcan figuras humanas. Nunca verás en las mezquitas retratos de Mahoma, como puedes ver los de Jesucristo o sus apóstoles en las iglesias cristianas.

Con esa limitación, ¿cómo podían decorar? Pues con bellísimas letras, con motivos vegetales (hojas, flores, troncos...) y con formas geométricas. Mira, por ejemplo, las figuras *nazaríes* con las que están creados los espectaculares mosaicos de la Alhambra de Granada. Se llaman "el hueso", "la pajarita" y "el pétalo", y con ellos se crearon maravillas como esta.

Simetrías en el plano → 15

Muchos de los animales, plantas y cristales pueden considerarse como dos partes repetidas con las limitaciones propias de la naturaleza, que nunca es perfecta.

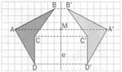
También en los edificios clásicos, como palacios, catedrales..., se buscaba en la simetría el modo de lograr la belleza.

Las torres de la fotografía son simétricas; cada una se puede considerar copia de la otra pero en sentido contrario.

En esta unidad estudiaremos esa clase de igualdad entre objetos y figuras diferentes o entre partes de los mismos.

1 Simetría axial: definición

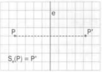
En esta figura se ha dibujado el cuadrilátero ABCD y a partir de él hemos obtenido A'B'C'D' de modo que los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ son perpendiculares a la recta e y las distancias de los puntos correspondientes a la recta e son iguales; por ejemplo, $\overline{MA} = \overline{MA'}$.



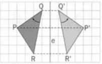
La recta e se llama **eje de simetría** y es mediatriz de los segmentos que determinan los puntos correspondientes.

Los pares de puntos correspondientes se dice que son **puntos simétricos** respecto del eje de simetría.

Los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D' se dice que son **figuras simétricas respecto del eje e**.



> Dos puntos P y P' son simétricos respecto de la recta e, eje de simetría, cuando e es mediatriz del segmento PP'.
>
> La simetría respecto de un eje se llama también **simetría axial**, y los puntos correspondientes, **homólogos**.

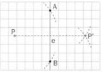


En una simetría axial los segmentos homólogos son iguales y también la medida de los ángulos correspondientes.

La construcción con regla y compás del punto simétrico de P respecto del eje e es la siguiente:

- Con centro en P y radio suficiente para que corte al eje de simetría se obtienen los puntos de intersección A y B.
- Sin variar el radio y con centro en A y en B, se obtiene P'.

Por ser PAP'B un rombo, el eje de simetría es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.



EJERCICIOS RESUELTOS

1 **En la cuadrícula del margen se ha dibujado un triángulo y su simétrico respecto del eje e. Comprobar directamente que los segmentos y los ángulos de las dos figuras son iguales.**

Se toma como unidad de medida el lado de un cuadrado.

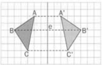
Por el teorema de Pitágoras vemos la igualdad de lados:

$AB = A'B' = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$BC = B'C' = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$AC = A'C' = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

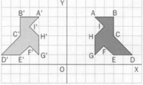
Los triángulos ABC y A'B'C' son iguales por tener los lados iguales, luego los ángulos correspondientes también lo son.



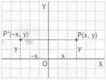
2 Simetría axial y coordenadas

Simetría respecto del eje de ordenadas

Estas pajaritas son simétricas respecto del eje OY. Observa la tabla. ¿Qué relación existe entre las coordenadas de los puntos y de sus simétricos?



Coordenadas de los puntos	Coordenadas de sus simétricos
A (3, 5)	A' (−3, 5)
B (5, 5)	B' (−5, 5)
C (5, 3)	C' (−5, 3)
D (7, 1)	D' (−7, 1)
E (5, 1)	E' (−5, 1)
F (4, 2)	F' (−4, 2)
G (3, 1)	G' (−3, 1)

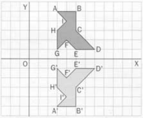


Dos puntos P(x, y) y P'(x', y') simétricos respecto del eje de ordenadas tienen sus abscisas opuestas y sus ordenadas iguales.

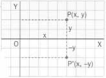
Las ecuaciones de la simetría respecto del eje OY son: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

Simetría respecto del eje de abscisas

Estas pajaritas son simétricas respecto del eje OX. Observa la tabla. ¿Qué relación existe entre las coordenadas de los puntos y de sus simétricos?



Coordenadas de los puntos	Coordenadas de sus simétricos
A (3, 5)	A' (3, −5)
B (5, 5)	B' (5, −5)
C (5, 3)	C' (5, −3)
D (7, 1)	D' (7, −1)
E (5, 1)	E' (5, −1)
F (4, 2)	F' (4, −2)
G (3, 1)	G' (3, −1)
H (3, 3)	H' (3, −3)
I (4, 4)	I' (4, −4)



Dos puntos P(x, y) y P'(x', y') simétricos respecto del eje de abscisas tienen sus abscisas iguales y sus ordenadas opuestas.

Las ecuaciones de la simetría respecto del eje OX son: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

EJERCICIOS RESUELTOS

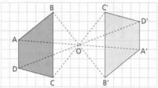
2 **Dado el triángulo de vértices A(−3, 2), B(6, −1) y C(8, 5), hallar los triángulos simétricos respecto del eje OX y del eje OY.**

Triángulo simétrico respecto de OX: A'(−3, −2), B'(6, 1) y C'(8, −5)

Triángulo simétrico respecto de OY: A"(3, 2), B"(−6, −1) y C"(−8, 5)

3 Simetría central: definición

En esta figura se ha dibujado el cuadrilátero ABCD y a partir de él hemos obtenido A'B'C'D' de modo que los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ pasan todos por un punto O y las distancias de los puntos correspondientes al punto O son iguales; por ejemplo, $\overline{OA} = \overline{OA'}$.

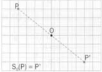


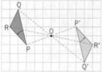
El punto O se llama **centro de simetría** y es punto medio de los segmentos que determinan los puntos correspondientes.

Los pares de puntos correspondientes se dice que son **puntos simétricos** respecto del centro de simetría.

Los cuadriláteros ABCD y A'B'C'D' se dice que son **figuras simétricas respecto del centro O.**

> Dos puntos P y P' son simétricos respecto del centro de simetría O cuando O es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.
>
> La simetría respecto de un punto se llama también **simetría central**, y los puntos correspondientes, **homólogos**.

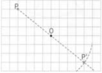




En una simetría central, los segmentos homólogos son iguales y la medida de los ángulos correspondientes también son iguales.

La construcción con regla y compás del punto simétrico de P respecto del centro O es consecuencia de la definición. Se hace así:

- Se traza la recta PO.
- Con centro en O y radio $\overline{OP}$ se traza un arco que corta a la recta OP y determina P'; P' es el punto simétrico de P.



EJERCICIOS RESUELTOS

3 **En la cuadrícula del margen se ha dibujado un triángulo y su simétrico respecto del centro O. Comprobar directamente que los segmentos y los ángulos homólogos son iguales.**

Se toma como unidad de medida el lado de un cuadrado.

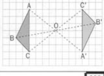
Utilizando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$AB = A'B' = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

$BC = B'C' = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$

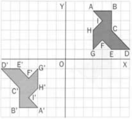
$CA = CA' = 6$

Por tanto, los triángulos ABC y A'B'C' son iguales, y por ser los triángulos iguales también lo son los ángulos correspondientes.

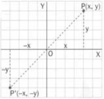


4 Simetría central y coordenadas

Estas pajaritas son simétricas respecto del centro O. Observa la tabla. ¿Qué relación existe entre las coordenadas de los puntos y de sus simétricos?



Coordenadas de los puntos	Coordenadas de sus simétricos
A (3, 5)	A' (−3, −5)
B (5, 5)	B' (−5, −5)
C (5, 3)	C' (−5, −3)
D (7, 1)	D' (−7, −1)
E (5, 1)	E' (−5, −1)
F (4, 2)	F' (−4, −2)
G (3, 1)	G' (−3, −1)
H (3, 3)	H' (−3, −3)
I (4, 4)	I' (−4, −4)



Para pasar de un punto a su simétrico se cambia el signo de las coordenadas. Por tanto, de P(x, y) se pasa a P'(−x, −y).

Dos puntos P(x, y) y P'(x', y') simétricos respecto del origen de coordenadas tienen sus abscisas y ordenadas opuestas.

Las ecuaciones de la simetría central son: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Dado el triángulo de vértices A(−3, 2), B(6, −1) y C(8, 5), hallar el triángulo simétrico respecto del origen de coordenadas.**

Las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico, A'B'C', son:

Punto simétrico de A(−3, 2): A'(3, −2)
Punto simétrico de B(6, −1): B'(−6, 1)
Punto simétrico de C(8, 5): C'(−8, −5)

5 **Encontrar las parejas de triángulos que son simétricos respecto del origen de coordenadas:**

a) A(1, 3), B(−2, 1), C(1, −1)
b) A(−3, 4), B(−2, 2), C(−5, −1)
c) A(4, −3), B(2, −2), C(3, −5)
d) A(−3, −4), B(−2, −2), C(−5, 1)
e) A(3, 4), B(2, 2), C(5, −1)
f) A(−4, 3), B(−2, 2), C(−3, 5)
g) A(−1, −3), B(2, −1), C(−1, 1)
h) A(4, 3), B(2, 2), C(−3, −5)

Las parejas de triángulos simétricos son las siguientes:

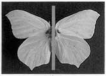
a y g; c y f; d y e.

El triángulo b y el h no son simétricos de ningún triángulo.

5 Ejes y centro de simetría en las figuras

Ejes de simetría

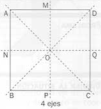
Hasta aquí hemos visto cómo se construye una figura simétrica de otra. Ahora vamos a ver si una figura se puede construir por simetría a partir de una parte de la misma.



Si doblásemos esta fotografía por la recta que hemos trazado, las dos partes en que queda dividida la mariposa coincidirían.

La recta e se llama **eje de simetría de la figura**. Los puntos que se corresponden al doblar son **simétricos**.

Una figura puede tener más de un eje de simetría. Por ejemplo, en un cuadrado hay cuatro ejes de simetría: las dos diagonales y las dos rectas que unen los puntos medios de los lados.



4 ejes

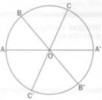
Los puntos A y C son simétricos respecto del eje BD.

Los puntos M y P son simétricos respecto del eje NQ.

> Una recta es eje de simetría de una figura si en la simetría respecto de esa recta cada punto de la figura tiene su simétrico en ella.

Centro de simetría

En esta circunferencia hemos trazado varios diámetros. Los extremos de los diámetros, A y A', B y B', ... son simétricos respecto del centro, ya que son puntos que equidistan del centro y están alineados. Todo punto de la circunferencia tiene su simétrico respecto del centro en la misma circunferencia. También el círculo tiene por centro de simetría el centro.



En la circunferencia, su centro es **centro de simetría**.

Una figura con centro de simetría es simétrica de ella misma con respecto a ese punto.

El cuadrado tiene por centro de simetría el punto O.

> Un punto es centro de simetría de una figura si en la simetría respecto de ese punto cada punto de la figura tiene su simétrico en ella.

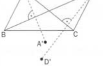
EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Comprobar, utilizando los simétricos de los vértices, que las diagonales del romboide no son ejes de simetría.**

En la figura, el punto simétrico del vértice A es el punto A' que no pertenece al romboide; luego la diagonal BD no es eje de simetría.

El punto simétrico del vértice D es el punto D' que no pertenece al romboide; luego la diagonal AC no es eje de simetría.

Se puede comprobar que al doblar la figura por una diagonal las dos mitades no coinciden.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Dibujar la situación.
- Utilizar figuras simétricas.
- Resolver el problema con la figura simétrica.

PROBLEMA

Los pueblos de Villanueva y Miñón se encuentran situados a la misma orilla de un tramo recto del río Nela. Un pastor quiere llevar un rebaño de ovejas de Villanueva a Miñón y de paso acercarse al río para dar de beber al ganado. ¿Cuál es el camino más corto?

DIBUJAR LA SITUACIÓN

- Se realiza un dibujo esquemático que represente la situación del problema y sobre él se prueban varios caminos.

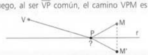
UTILIZAR FIGURAS SIMÉTRICAS

- Como el río se puede asimilar a una recta, eso sugiere hacer una simetría.

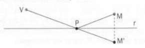
RESOLVER CON LA FIGURA SIMÉTRICA

- Ahora hay que averiguar en qué lugar de la recta se encuentra el punto P en el que el ganado beberá agua.

  Por tratarse de una simetría, la recta r es mediatriz del segmento $\overline{MM'}$, por lo que todos los puntos de la recta equidistan de M y M', esto es, $\overline{PM} = \overline{PM'}$. Luego, al ser $\overline{VP}$ común, el camino VPM es igual al VPM'.



Pero el camino más corto entre los puntos V y M' es la línea recta. Entonces P es la intersección de r y $\overline{VM'}$.



De todo ello se concluye que el camino más corto es VPM.

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

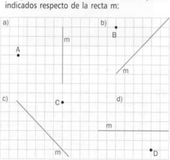
1 Halla las coordenadas de los puntos simétricos de A(1, −2), B(3, 8), C(−3, 5) y D(−1, 15) respecto de:

a) Eje de abscisas OX.
b) Eje de ordenadas OY.
c) Origen de coordenadas.

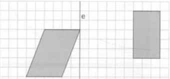
2 Halla el segmento simétrico de $\overline{AB}$ determinado por los puntos A(2, 3) y B(5, 1) respecto del eje de ordenadas y comprueba que $\overline{AB}$ y su simétrico $\overline{A'B'}$ son iguales.

3 Dibuja el triángulo simétrico de ABO dado por A(−8, −1), B(−5, 2) y O(0, 0) respecto del origen de coordenadas. ¿Cómo son los lados de ambos triángulos? ¿Y los triángulos?

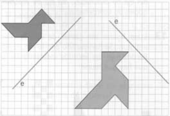
4 Dibuja en cada caso el simétrico de los puntos indicados respecto de la recta m:



5 Dibuja las figuras simétricas respecto del eje e:

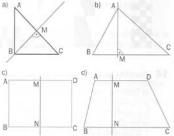


6 Dibuja las figuras simétricas de las pajaritas respecto del eje de simetría e:



7 Dada la circunferencia de centro C(−7, 4) y radio 5, dibuja su simétrica respecto del eje de ordenadas, del eje de abscisas y del origen de coordenadas.

8 Indica en las siguientes figuras cuáles son ejes de simetría y cuáles no:



9 Marca en el plano dos puntos P y P' cualesquiera. Dibuja:

a) El eje respecto al que son simétricos.
b) El centro respecto al que son simétricos.

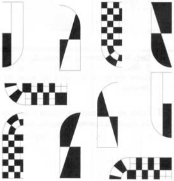
10 Dibuja los paralelogramos romboide, rombo, rectángulo y cuadrado y traza en cada uno de ellos los posibles ejes y centros de simetría.

11 Dibuja con regla y compás el eje de simetría de un ángulo.

A C T I V I D A D E S

12 Dibuja el segmento determinado por los puntos A(3, −1) y B(4, 6) y halla su simétrico respecto del eje de ordenadas, del eje de abscisas y del origen de coordenadas.

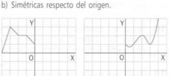
13 Estas figuras son partes de escudos de casas antiguas. Se han partido por su eje de simetría. Reconstruye los escudos indicando las parejas que hay que reunir:



14 Completa las siguientes gráficas para que sean:

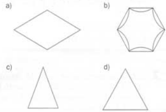
a) Simétricas respecto del eje de ordenadas.

b) Simétricas respecto del origen.

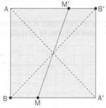


PROBLEMAS PARA APLICAR

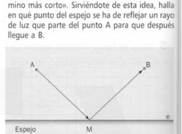
15 Copia las figuras y dibuja los ejes de simetría:



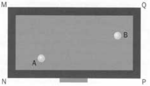
16 En un cuadrado se ha trazado una recta que pasa por su centro de simetría. Razona que las dos partes en que ha quedado dividida la figura son iguales.



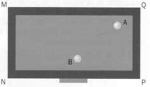
17 Euclides (aprox. 300 a.C.) enunció las leyes de reflexión de la luz sobre un espejo plano. Herón de Alejandría, 400 años después, afirmó algo más sencillo: «La luz ha de tomar siempre el camino más corto». Sirviéndote de esta idea, halla en qué punto del espejo se ha de reflejar un rayo de luz que parte del punto A para que después llegue a B.



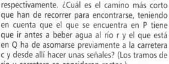
18 Pepe y Luis están jugando al billar. En un determinado momento las bolas se encuentran en las posiciones indicadas por el dibujo. Indica el camino que debe seguir la bola A para que rebotando en la banda $\overline{MQ}$ golpee a la bola B.



19 En esta otra situación, indica el camino que debe seguir la bola A para que rebotando en las bandas $\overline{QP}$ y $\overline{PN}$ golpee a la bola B.



20 Dos amigos están situados en los puntos P y Q, respectivamente. ¿Cuál es el camino más corto que han de recorrer para encontrarse, teniendo en cuenta que el que se encuentra en P tiene que ir antes a beber agua al río r y el que está en Q ha de asomarse previamente a la carretera c y desde allí hacer unas señales? (Los tramos de río y carretera se consideran rectos.)



21 Demuestra por simetría que la recta que pasa por el centro de un paralelogramo divide a este en dos partes iguales.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

22 Si calculamos la figura simétrica de una figura respecto de un eje y a continuación la simétrica de esta última respecto del mismo eje, ¿qué figura se obtiene? ¿Ocurre lo mismo si la simetría es respecto a un punto?

23 ¿Qué ejes de simetría tiene un segmento $\overline{AB}$? ¿Cuál es su centro de simetría?

24 Un alumno dibuja el segmento simétrico de $\overline{AB}$, de 4 cm, respecto de un eje de simetría y observa con sorpresa que es el mismo segmento, salvo que el orden de los puntos está cambiado. ¿Cuál es el eje?

25 En una simetría central, ¿qué puntos se transforman en sí mismos? En una simetría axial, ¿qué puntos se transforman en sí mismos?

26 ¿Por dónde tiene que pasar el eje de simetría de una circunferencia para que se transforme en sí misma?

27 Dibuja un sistema de coordenadas cartesianas.

a) ¿Qué puntos del plano no varían si se toma como centro de simetría el origen?

b) ¿Qué puntos del plano no varían si se toma como eje de simetría el de ordenadas?

c) ¿Qué puntos del plano no varían si se toma como eje de simetría el de abscisas?

28 Un alumno dice que en un triángulo equilátero los ejes de simetría son las mediatrices, otro que las alturas, otro que las bisectrices y, finalmente, un cuarto que las medianas. ¿Quién tiene razón?

29 Un alumno dice: «Todos los polígonos regulares tienen tantos ejes de simetría como lados». Compruébalo para el triángulo, cuadrado, pentágono y hexágono regulares.

A C T I V I D A D E S

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

30 Halla las coordenadas de los puntos simétricos de P(1, −2), Q(3, 8) y R(−3, 5) respecto del centro de simetría C(1, 1).

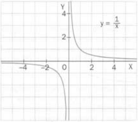
31 Halla las coordenadas de los puntos simétricos de A(1, 2), B(3, 8) y C(3, 5) respecto del eje de simetría paralelo al eje de abscisas y que pasa por el punto P(1, 1).

32 Representa los puntos A(1, 3), B(3, 5) y C(6, 4) y halla sus simétricos respecto del eje de simetría paralelo al eje de ordenadas y que pasa por el punto P(2, 1).

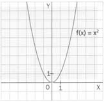
33 Prueba que el punto de corte de las diagonales de un romboide es el centro de simetría de dicha figura.

34 Aquí tienes una sucesión de figuras. ¿Cuál es la siguiente?

35 En la figura aparece representada una curva que se llama hipérbola equilátera. Comprueba si es simétrica respecto del origen utilizando las ecuaciones de la simetría.



36 La figura representa en un sistema de coordenadas cartesianas una curva que se llama parábola. Comprueba si es simétrica respecto de algún eje utilizando las ecuaciones de las coordenadas.



37 En la pared interna de un tarro cilíndrico de cristal se ve una gota de miel a 6 cm del borde superior de la vasija. En la pared externa, en el punto diametralmente opuesto a la gota de miel, se ha posado una mosca. ¿Sabrías indicarle a la mosca el camino más corto para llegar a la gota de miel andando?

La altura del tarro es 40 cm, y su diámetro, 20 cm.

38 La felicitación simétrica. ¿Cuál es el eje de simetría?

MURAL DE MATEMÁTICAS

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

Envía tus propios mensajes secretos

Un par de hojas de papel normal, una de papel carbón, un bolígrafo y un espejo es todo lo que necesitas para llevar a cabo un curioso experimento que te permitirá enviar tus propios mensajes casi secretos.

Pon la hoja de papel carbón con la cara que mancha hacia arriba. Coloca sobre ella las dos cuartillas normales, una encima de otra. Escribe el mensaje con un bolígrafo en la primera. Cuando hayas acabado retírala y coge la segunda. Verás que por su cara inferior ha quedado escrito el mensaje, pero... ¡al revés!

Muéstraselo a alguien que no sepa qué dice el mensaje y verás cómo no le es nada fácil interpretarlo, sobre todo si tu letra es un poco enrevesada. Entonces... ¿cómo se puede descifrar sin dificultad? Muy sencillo: pon el mensaje frente a un espejo y... *¡hale hop!*

UN ALFABETO OTEBAFLA

Fíjate en este alfabeto. Tiene una característica muy curiosa: aunque cada letra conserva sus rasgos, están dispuestas de forma simétrica. Es obra de un artista llamado Kim.

OBRAS DE ARTE VOLADORAS

Cuando vemos una mariposa volando, apenas podemos apreciar el curioso diseño de sus alas. Pero si tienes oportunidad de observarlas disecadas en alguna colección te quedarás asombrado por la belleza de sus alas. Sus colores y sus formas parecen pintados por algún artista fantástico. Además, en casi todas las especies, la simetría entre las dos alas es perfecta.

Y nosotros, ¿somos simétricos?

Se podría decir que somos casi simétricos.

La parte derecha y la izquierda de nuestro cuerpo y de nuestra cara son muy similares, aunque hay pequeñas diferencias.

Nuestro ojo derecho no es exactamente igual al izquierdo; nuestras dos orejas pueden tener diferencias mínimas... ¿Quieres saber cómo serías si los dos lados de tu cara fueran exactamente iguales? Coge una foto de tu rostro (debe ser una toma de frente) y dóblala o córtala por la línea central que atraviesa tu cara de arriba abajo. Ahora acerca una de las mitades a un espejo. Algunas personas cambian mucho, otras apenas nada... **¿Y tú?**

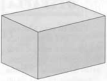
NUESTRO AMIGO EL SIMÉTRICO

¿Qué mano usas para escribir? ¿Y para lavarte los dientes? La mayoría de las personas utilizan la derecha, es decir, son diestras. Si ese es tu caso, tienes un amigo inseparable que es zurdo: la imagen que te devuelve el espejo. Y si usas la izquierda, tu amigo es diestro.

La próxima vez que te laves los dientes date cuenta de que en el espejo del baño hay alguien igualito que tú que se los está cepillando con la izquierda.

La razón es muy sencilla: la imagen que nos devuelve el espejo es simétrica de la real.

A c t i v i d a d e s



1 El volumen de un cubo es 600 cm³. ¿Qué volumen tendrá otro cuyos lados sean el doble? ¿Y si fueran la mitad?

2 La diagonal de un rectángulo mide 26 cm, y el perímetro, 68 cm. Halla los lados del rectángulo.

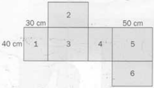
3 Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a los números 3, 4 y 12 y su suma es 76 m. Halla las dimensiones y la medida de la diagonal.

4 Se corta una pirámide por un plano paralelo a la base.

a) ¿Cómo se llaman los poliedros resultantes?
b) ¿El tronco de pirámide es un poliedro? ¿Por qué?
c) Halla cuántas caras, aristas y vértices tiene un tronco de pirámide de base un hexágono. ¿Cumple la relación de Euler?

5 En la siguiente figura se muestra un cartón con el que se quiere construir un ortoedro doblando convenientemente por las rayas.

a) Indica cuáles de los rectángulos señalados con números son caras paralelas.
b) Calcula el área de la caja.
c) Calcula el volumen de la caja.



6 El líquido contenido en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro alcanza 12 cm de altura; se vierte en una probeta graduada de 6 cm de diámetro, ¿qué altura alcanzará el líquido en la probeta?

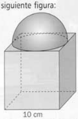
7 La gran pirámide de Keops es una pirámide regular de base cuadrada. El lado de la base mide 230 m, y la altura, 146 m. Suponiendo que la pirámide de Keops fuera perfecta:

a) Calcula su volumen.
b) Calcula el área de una de las caras.

8 En una probeta graduada (forma cilíndrica) de 12 cm de diámetro se introduce una piedra de modo que la altura del agua sube 5 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?

9 Se introduce una bola de acero en una probeta graduada y vemos que el agua desalojada es 942 cm³. ¿Cuánto mide el radio de la bola?

10 Calcula el volumen de la siguiente figura:



11 Se corta una sandía perfectamente esférica en 8 rajas iguales.

a) ¿Cuántas cuñas se forman?
b) ¿Qué ángulo forman los planos que determinan las cuñas?
c) Si el peso de la sandía es 4 kg, ¿cuánto pesa cada trozo de sandía?

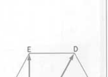
12 La latitud de un punto A de la Tierra es 60° Norte, y su longitud, 40° Este. ¿Cuáles son las coordenadas geográficas del punto B que está en las antípodas del punto A?

13 Dado el rectángulo de vértices ABCD, completa las siguientes igualdades:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \_\_$
b) $\overrightarrow{AD} + \_\_ = \overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \_\_$
d) $\_\_ + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
e) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = \_\_$
f) $\overrightarrow{BC} + \_\_ = \overrightarrow{BA}$

14 Los vértices de un decágono convexo, ¿cuántos vectores determinan? Si resulta dificultosa la resolución, comienza por casos más sencillos, por ejemplo el triángulo, cuadrado..., y generaliza luego.

15 Sean A, B, C, D, E y F los vértices de un hexágono regular. Expresa los vectores de las diagonales como suma de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AF}$.



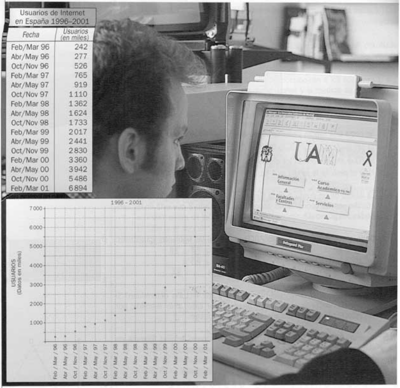
16 A continuación se han escrito las letras del abecedario:

A B C D E F G H I J K L M N Ñ O P Q R S T U V W X Y Z

a) ¿Cuáles tienen eje de simetría? ¿Cuántas son?
b) ¿Cuáles tienen centro de simetría? ¿Cuántas son?
c) ¿Cuáles tienen dos ejes de simetría? ¿Cuántas son?
d) ¿Cuáles tienen infinitos ejes de simetría? ¿Cuántas son?
e) ¿Cuáles no tienen centro ni ejes de simetría? ¿Cuántas son?

17 ¿Cuál es la figura transformada por una simetría central de una recta que pasa por el centro de simetría? ¿Y si no pasa por el centro de simetría? Razona sobre una figura apropiada.

18 Halla los puntos homólogos de los puntos M(5, 4), N(2, −3) y R(0, 4) en un giro de centro el origen y ángulo −90°.



Usuarios de Internet en España 1996-2001	
Fecha	Usuarios (en miles)
Feb/Mar 96	242
Abr/May 96	277
Oct/Nov 96	526
Feb/Mar 97	765
Abr/May 97	919
Oct/Nov 97	1 110
Feb/Mar 98	1 362
Abr/May 98	1 624
Oct/Nov 98	1 733
Feb/Mar 99	2 017
Abr/May 99	2 441
Oct/Nov 99	2 830
Feb/Mar 00	3 360
Abr/May 00	3 942
Oct/Nov 00	5 486
Feb/Mar 01	6 894

La gráfica muestra la evolución del número de usuarios de Internet en España en el período 1996-2001.

Uno de los conceptos más importantes de la matemática es, sin duda alguna, el de función, ya que aparece en todas sus ramas implícita o explícitamente.

La expresión de una función por fórmulas algebraicas es el ideal de todo matemático e investigador, ya que de esa forma conseguimos conocer la «dependencia funcional» que intuimos existe entre las diversas magnitudes objeto de estudio.

Así trabaja la ciencia: estudiando la dependencia de los fenómenos, al principio empíricamente, para tratar luego de expresarla matemáticamente por medio de ecuaciones.

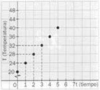
Fueron las relaciones de esta clase las que sirvieron de origen al concepto de «función».

1 Dependencia entre magnitudes

❖ Relaciones dadas por tablas

En una clase de laboratorio un alumno ha medido la temperatura de un líquido según se calentaba. Los resultados del experimento los anotaba en la siguiente tabla de temperatura-tiempo:

Tiempo (min)	0	1	2	3	...	x
Temperatura (°C)	20	24	28	32	...	y



La temperatura del líquido depende del tiempo que se esté calentando. Existe una relación entre las magnitudes tiempo y temperatura.

❖ Relaciones dadas por una gráfica

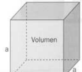
Esta gráfica representa la variación de la temperatura en un observatorio a lo largo de un día de invierno. A partir de la gráfica es fácil determinar la relación entre la temperatura y las horas. Por ejemplo, la temperatura mínima se ha alcanzado a las cuatro de la mañana, y la máxima, a las dos de la tarde (14.00 horas):

Las gráficas dan una visión intuitiva de la relación entre dos magnitudes y el comportamiento de una magnitud en función de la otra.

❖ Relaciones dadas por fórmulas

Muchas de las relaciones entre magnitudes que se presentan en la práctica vienen dadas por expresiones algebraicas.

- El volumen (V) de un cubo depende de la longitud (a) de la arista. La fórmula que relaciona ambas magnitudes es $V = a^3$.
- Si el precio de 1 kg de naranjas es 0,60 euros, el coste (C) de la compra de naranjas depende del número (k) de kilogramos. La fórmula que relaciona ambas magnitudes es $C = 0{,}60 \cdot k$.
- El espacio (e) recorrido en la caída libre de un cuerpo depende del tiempo (t) y viene dado, aproximadamente, por la fórmula $e = 5t^2$.



En estos ejemplos conocemos la relación entre dos magnitudes y el comportamiento de una magnitud en función de la otra.

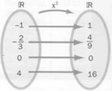
Las relaciones entre magnitudes en matemáticas determinan funciones.
Para indicar que una magnitud (y) depende o es función de otra (x) se utiliza la notación $y = f(x)$, que se lee «y es función de x».

2 Funciones: definición

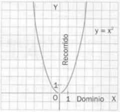
Si se conoce el lado de un cuadrado, x, su área, A, se puede expresar por la fórmula $A = x^2$ o también así: $A(x) = x^2$, para indicar que el área depende del valor del lado, x.

Si no nos referimos a una magnitud concreta, se escribe $f(x) = x^2$.

En una calculadora esta función viene dada por la tecla de la figura. Si se introduce un valor en la pantalla, pulsando la tecla aparece otro. En las siguientes figuras se indica la correspondencia dada por la fórmula $f(x) = x^2$, la **tabla de valores** y la **gráfica**.



x	$f(x) = x^2$
1	1
−2	4
3	9
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
2	4
4	16
...	...



Una **función** es una relación entre dos conjuntos de números, de modo que a cada valor del primero le corresponde un único valor del segundo.

Las funciones son como las máquinas en las que se introduce un elemento, x, y devuelven otro valor, y, que también se designa **f(x)**.

La entrada x es la **variable independiente**.

Las entradas válidas forman el **dominio** y es el conjunto de los valores posibles de la variable independiente.

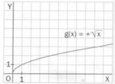
Se designa por **Dom f**.

La salida y o f(x) es la **variable dependiente**.

Las salidas válidas forman el **recorrido** y es el conjunto de los valores posibles de la variable dependiente.

Se designa por **f(D)**.

En la representación gráfica de una función el dominio es una parte del eje de abscisas y el recorrido del eje de ordenadas.



EJERCICIOS RESUELTOS

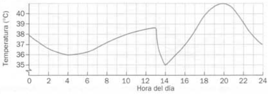
1 Indicar el dominio de las funciones $f(x) = -3x + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

El dominio de la función $f(x) = -3x + 2$ es el conjunto de valores que se puede dar a x y coincide con los números reales ℝ, ya que para cualquier número a existe el valor numérico $f(a) = -3a + 2$.

La función $g(x) = \sqrt{x}$ tiene como dominio los números reales positivos y el cero, ya que para $x < 0$ no tiene sentido $\sqrt{x}$.

3 Variación de una función en un intervalo

Un enfermo en la UVI está conectado a un aparato que marca su temperatura en cada instante. La gráfica obtenida durante un día ha sido la siguiente:



INTERVALO CERRADO

El intervalo [a, b] contiene todos los números mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

Longitud del intervalo = b − a.

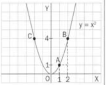
Recuerda que en [a, b] debe ser a < b.

Observando la gráfica vemos que la temperatura ha variado mucho a lo largo de ese día. Esta variación permite preguntarnos sobre la temperatura: ¿Cuándo ha subido la fiebre? ¿Cuándo ha bajado? ¿En qué hora ha sido mínima? ¿En qué hora ha sido máxima?

La variación de la temperatura entre dos horas cualesquiera es la diferencia correspondiente entre las temperaturas. Por ejemplo, la variación entre las 14.00 y 20.00 horas ha sido de 6°. Esta diferencia se llama **tasa de variación**.

En una persona normal la tasa de variación es casi nula.

En el margen está representada la función $f(x) = x^2$. Veamos cuál es la tasa de variación entre algunos puntos.



- **¿Cuál es la variación de la función desde x = 1 hasta x = 2?**

  La gráfica muestra que el aumento al pasar desde el punto A al punto B es de 3 unidades, ya que:

  $$f(2) - f(1) = 4 - 1 = 3$$

- **¿Cuál es la variación al pasar desde el punto C al punto A?**

  La función ha experimentado una disminución de 3 unidades, ya que:

  $$f(1) - f(-2) = 1 - 4 = -3$$

- **¿Cuál es la variación desde C a B?**

  La variación de la función ha sido nula, ya que:

  $$f(-2) - f(2) = 4 - 4 = 0$$

La **tasa de variación** de una función f(x) en el intervalo [a, b] es igual al valor que toma en el punto b menos el valor que toma en el punto a. Se designa por **TV[a, b]**.

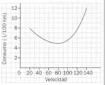
$$TV[a, b] = f(b) - f(a)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **La gráfica de la función muestra el consumo en litros/100 km de un coche según su velocidad. Hallar la tasa de variación en los intervalos de velocidad [20, 80], [80, 140].**

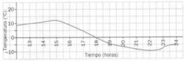
TV[20, 80] = 5 − 8 = −3 litros/100 km

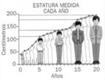
TV[80, 140] = 12 − 5 = 7 litros/100 km

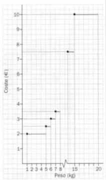


4 Continuidad de funciones

Esta figura muestra la variación de la temperatura en un día de invierno. La variación de la gráfica es continua sin saltos bruscos que rompan la gráfica, ya que es imposible, por ejemplo, que salte de 10° a 15° sin pasar por los valores de las temperaturas intermedias.







Las funciones que tienen esta característica gráfica se llaman **funciones continuas**.

La mayoría de los procesos de la naturaleza vienen dados por funciones continuas. Por ejemplo, la función que da el peso de una persona en un período de tiempo es una función continua.

La función representada en el margen da la altura de una persona desde su nacimiento hasta los 20 años. Puesto que el crecimiento es un proceso continuo, a un pequeño aumento en el tiempo le corresponde un pequeño aumento en la estatura. Esta gráfica no tiene saltos y podemos afirmar que se trata de una función continua.

En la segunda figura del margen se muestra el coste del envío de un paquete por una agencia según su peso. De 1 a 5 kg, sea cual sea el peso, cuesta 2 euros, de 5 a 6 kg, 2,50 euros, etc.

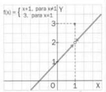
Como se ve en la gráfica, el coste no tiene una variación continua según el peso. La gráfica está «rota» en los pesos 5 kg, 6 kg, 7 kg, en los que hay un salto en el coste del envío. Por muy pequeño que sea un intervalo que contenga 6 kg, la tasa de variación será de 0,50 euros.

Cuando sucede esto se dice que la función es discontinua en esos valores.

Admitimos ahora una definición intuitiva de continuidad. En los cursos siguientes se formalizará esta definición.

> Una **función** es **continua** cuando la gráfica no presenta saltos; esto equivale a decir que para cualquier intervalo cuya longitud se aproxime a 0 la tasa de variación también se aproximará a 0.

EJERCICIOS RESUELTOS



3 **La gráfica de la función (ver figura) coincide con los puntos de la recta $y = x + 1$, salvo en $x = 1$ que vale 3. ¿Es continua?**

Observando la gráfica se ve que en $x = 1$ la función está «rota» y en principio se puede decir que es discontinua.

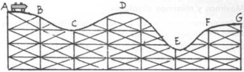
— Si elegimos el intervalo [0,9; 1] la tasa de variación se aproxima a 1.

— Si elegimos el intervalo [0,99; 1] la tasa de variación se aproxima a 1.

Como la tasa de variación no se aproxima a 0, podemos decir que la función es discontinua en $x = 1$.

5 Crecimiento y decrecimiento de funciones

El dibujo representa el perfil de una montaña rusa de un parque de atracciones. Tanto la distancia horizontal como la vertical están dadas en metros.

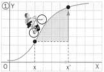


La variación de la altura de la vagoneta muestra si sube o baja.

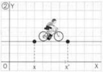
La vagoneta baja cuando va de A a C y de D a E.

La vagoneta sube cuando va de C a D y de E a G.

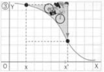
En las siguientes figuras formalizamos esta idea de subida o bajada para una función:



Los valores que toma la función f(x) son cada vez mayores.
La tasa de variación es positiva.
La función es **creciente**.



Los valores que toma la función f(x) son iguales.
La tasa de variación es nula.
La función es **constante**.



Los valores que toma la función f(x) son cada vez menores.
La tasa de variación es negativa.
La función es **decreciente**.

Una función f(x) es:

- **creciente** en un intervalo si para todo par de valores del mismo la tasa de variación es positiva;
- **decreciente** en un intervalo si para todo par de valores del mismo la tasa de variación es negativa.

LA FUNCIÓN DEL CORAZÓN

La gráfica de un electrocardiograma muestra al médico las posibles anomalías del corazón de un paciente.

EJERCICIOS RESUELTOS

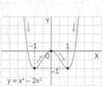
4 **En el margen se ha dibujado la gráfica de la función $y = x^4 - 2x^2$. Observando la figura, indicar los intervalos en los cuales la función es creciente o decreciente.**

Intervalo decreciente: $(-\infty, -1)$

Intervalo creciente: $(-1, 0)$

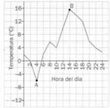
Intervalo decreciente: $(0, 1)$

Intervalo creciente: $(1, +\infty)$



6 Máximos y mínimos absolutos. Máximos y mínimos relativos

La comparación de un punto de una función con los que se encuentran próximos a él permite definir los puntos máximos y mínimos de la función.



Máximos y mínimos absolutos

La gráfica del margen representa la variación de la temperatura en un observatorio meteorológico a lo largo de un día de invierno.

¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿Cuál fue la mínima?

Observando la gráfica es fácil responder:

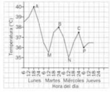
— La temperatura mínima se alcanza en el punto A a las cuatro de la mañana y es de 6 grados bajo cero.

Este valor se llama **mínimo absoluto** de la función.

— La temperatura máxima se alcanza en el punto B a las 14.00 horas y es de 16 grados sobre cero.

Este valor se llama **máximo absoluto** de la función.

Una función f(x) tiene en x = a un punto **máximo (mínimo)** absoluto si los valores que toma la función son todos menores (mayores) que él.



Máximos y mínimos relativos

La gráfica del margen representa la variación de la temperatura de un alumno enfermo a lo largo de cuatro días.

¿En qué horas de estos días alcanzaba mayor o menor fiebre?

Observando la gráfica, la respuesta es:

- En los puntos A, B, y C se alcanzan los mayores valores con relación a los que están próximos a ellos, que son menores.

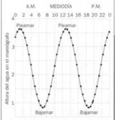
  Estos valores se llaman **máximos relativos**.

- En los puntos M, N y P se alcanzan los menores valores con relación a los que están próximos a ellos, que son mayores.

  Estos valores se llaman **mínimos relativos**.

Una función f(x) tiene en x = a un punto:

- **máximo relativo** si los valores próximos a él que toma la función son menores;
- **mínimo relativo** si los valores próximos a él que toma la función son mayores.



EJERCICIOS RESUELTOS

5 **La figura del margen muestra la variación de profundidad en un puerto. ¿A qué horas se mide la máxima profundidad? ¿Y a qué horas la mínima?**

La máxima profundidad se alcanza a las 1.00 y 13.30 horas. Observa que aquí el máximo valor se alcanza dos veces.

La mínima profundidad se alcanza a las 7.00 y a las 19.30 horas.

7 Simetrías y periodicidad

Simetría respecto del eje de ordenadas

x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

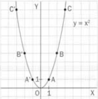
La gráfica de la función $y = x^2$, o $f(x) = x^2$, tiene como eje de simetría el eje de ordenadas OY.

Los puntos A y A', B y B', C y C' son simétricos respecto de OY.

El punto O es simétrico de sí mismo.

Si doblásemos esta gráfica por el eje OY, las dos partes en que queda dividida coincidirían.

Un punto cualquiera de la gráfica, $P(x, x^2)$, tiene como simétrico $P'(-x, x^2)$ que también está en la gráfica.



Una **función** $f(x)$ es **simétrica** respecto del **eje de ordenadas** cuando para todo x del dominio toma el mismo valor en x y en $-x$.

$f(-x) = f(x)$

Simetría respecto del origen

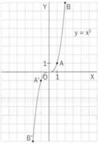
x	$y = x^3$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

La gráfica de la función $y = x^3$, o $f(x) = x^3$, tiene como centro de simetría el origen de coordenadas O.

Los puntos A y A', B y B' son simétricos respecto del centro O.

El punto O es simétrico de sí mismo.

Un punto cualquiera de la gráfica, $P(x, x^3)$, tiene como simétrico el punto $P'(-x, -x^3)$, que también está en la gráfica.

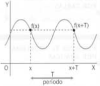


Una **función** $f(x)$ es **simétrica** respecto del **origen** cuando para todo x del dominio toma valores opuestos en x y en $-x$.

$f(-x) = -f(x)$

Funciones periódicas

En una noria de feria, una persona que va montada vuelve a tomar las mismas posiciones respecto al suelo que en la primera vuelta. En la fig. 2 se ve la gráfica aproximada descrita en tres vueltas. La gráfica de la función se repite por intervalos. Las funciones que tienen este comportamiento se llaman **periódicas**.



Una función es periódica si existe un número T, distinto de cero, tal que $f(x + T) = f(x)$, para todo x.

$f(x + T) = f(x)$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Hacer una tabla de valores.
- Representar estos valores en una gráfica.
- Utilizar la tabla o la gráfica de la función.

PROBLEMA

Don Cosme acaba de comprar un coche que le ha costado 19 500 €. Por una revista de automóviles ha sabido que esta marca se deprecia a un ritmo de un 20 % anual. Pasado el tiempo quiere venderlo y le dan 5 200 euros utilizando esta depreciación. ¿Cuántos años han transcurrido?

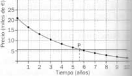
HACER UN TABLA

- Para empezar haremos una tabla del precio del coche al final de los sucesivos años utilizando la depreciación del 20 %:

Tiempo (años)	Precio (€)
A la adquisición	19 500
Al cabo de un año	19 500 × 0,8 = 15 600
Al cabo de dos años	15 600 × 0,8 = 12 480
Al cabo de tres años	12 480 × 0,8 = 9 984
Al cabo de cuatro años	9 984 × 0,8 = 7 987,20
Al cabo de cinco años	7 987,20 × 0,8 = 6 389,76
Al cabo de seis años	6 389,76 × 0,8 = 5 111,80

REPRESENTAR LA GRÁFICA

- La representación gráfica de esta tabla es la siguiente:



RESOLVER EL PROBLEMA POR TABLAS

- Para resolver el problema se puede utilizar la tabla anterior.

  Vemos que el coche debe venderse en el sexto año, ya que al final del mismo valdría aproximadamente 5 200 €.

RESOLVER EL PROBLEMA POR GRÁFICAS

- Conocemos la gráfica de la función de depreciación del coche.
  - El problema se resuelve ahora buscando un punto de la gráfica cuya ordenada valga 5 200 €.
  - Para ello basta trazar una recta paralela al eje OX cuya ordenada valga 5 200 €.
  - Esta recta y la gráfica se cortan en un punto P cuya abscisa corresponde al tiempo transcurrido. Como vemos, coincide casi con 5 años y medio.

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Dada la función f(x) que asocia a cada número real su doble:

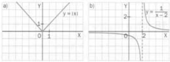
a) Escribe la expresión de la función.
b) Calcula f(1), f(2), f(3).
c) Indica cuál es su dominio y recorrido.

2 Dada la tabla:

x	0	1	2	3	4	...
y	1	3	5	7	9	...

representa estos puntos en un sistema de coordenadas y escribe la ecuación de la función que relaciona las variables x e y.

3 Escribe el dominio y el recorrido de las funciones cuyas gráficas son:

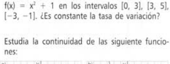


4 Halla el dominio de las funciones:

a) $f(x) = 2x$
b) $f(x) = x^3$
c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$

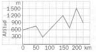
5 Halla la tasa de variación de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los intervalos [0, 3], [3, 5], [−3, −1]. ¿Es constante la tasa de variación?

6 Estudia la continuidad de las siguiente funciones:



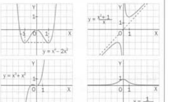
7 Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = -x^2$, indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos en los que hay máximos o mínimos.

8 Fíjate en la siguiente gráfica y contesta:



a) ¿En qué intervalos la función es creciente o decreciente?
b) Indica, si existen, el máximo y el mínimo absoluto.
c) Indica, si existe, algún máximo o mínimo relativo.

9 Estudia la simetría de las siguientes funciones:



10 Estudia cuáles de las siguientes funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas o respecto del origen:

a) $f(x) = x^2 + 8$
b) $f(x) = x^3 - 5$
c) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$
d) $f(x) = x^3 - x - 3$

11 Dibuja en el intervalo [0, 5], la función que asocia a cada número positivo la parte decimal; por ejemplo, al número 2,34 le corresponde en el dibujo 0,34. ¿Qué tipo de función es?

ACTIVIDADES

Problemas para aplicar

12 Un estudio médico muestra cómo crece un bebé antes de nacer según el mes de gestación en que se encuentra su madre, proporcionando la siguiente tabla:

Edad (meses)	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud (cm)	4	8	15	24	29	34	38	42

Representa la gráfica de la longitud en función de la edad.

13 El gasto de gasolina según los kilómetros recorridos por un coche viene dado por la siguiente tabla:

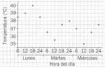
Espacio: e (km)	0	50	100	150	200	250	...
Gasolina: G (litros)	0	3,5	7	10,5	14	17,5	...

a) Escribe la expresión de la función G(e).

b) Calcula G(300), G(400), G(450).

c) Representa la gráfica de la función. ¿Qué figura es?

14 Cuando Gema estuvo enferma le tomaban la temperatura cuatro veces al día, obteniendo los puntos que presentamos en el siguiente diagrama:

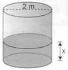


a) ¿Tiene sentido unir dichos puntos? ¿Es continua la función?

b) ¿Qué día y a qué hora tuvo la temperatura máxima? ¿Y la mínima?

c) ¿Cuáles son los intervalos en los que la fiebre crecía? ¿Y cuándo decrecía?

15 Se quiere construir un pozo en forma cilíndrica de 2 m de diámetro. Expresa el volumen del agua que cabe en el pozo en función de su profundidad x.

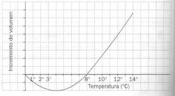


16 Crispín quiere comprar un coche; tiene muy claro el modelo pero no sabe si comprarlo de gasolina o diesel. El primero cuesta 18 000 €, y el segundo, 12 100 €. El precio de la gasolina es de 0,84 €/litro, y el del gasóleo, 0,60 €/litro. Da la función que relaciona el coste (precio del coche más precio del combustible) con el número de kilómetros para cada coche.

17 Cada paso de una llamada telefónica cuesta 0,10 euros y cada uno de ellos dura 1 minuto. Dibuja la gráfica que indica el coste de una llamada de menos de 5 minutos. ¿En qué puntos es discontinua?

18 Dibuja la gráfica que indica el coste de una carrera de taxi de 3 km, sabiendo que cada 300 m cuesta 0,50 €, y la bajada de bandera inicial, 1 €. ¿Es creciente la función? ¿Es continua la función?

19 La siguiente figura muestra la variación del volumen del agua cuando la temperatura varía desde 0° C:



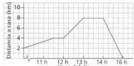
a) ¿En qué intervalo el volumen decrece? ¿En cuál crece?

b) ¿A qué temperatura el volumen del agua es mínimo?

c) ¿Para qué temperaturas alcanza el mismo volumen?

A C T I V I D A D E S

20 La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia de un alumno a su casa a partir de un momento dado:



a) ¿En qué intervalos se está alejando de casa?
b) ¿En qué intervalos está parado?
c) ¿En qué intervalos se está acercando?

21 Los alumnos de un colegio han ido de excursión. La siguiente figura muestra la gráfica de la distancia del autocar al colegio desde el momento que salen:

a) ¿En qué intervalos se está alejando del colegio?
b) ¿En qué intervalos está parado?
c) ¿En qué intervalos se está acercando?
d) ¿Cuál es la distancia real recorrida hasta E?

22 La siguiente gráfica muestra la altura del sol sobre el horizonte, expresada en grados, a lo largo de un cierto día.

a) ¿A qué hora sale el sol? ¿A qué hora se pone?
b) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento?
c) ¿A qué hora tiene el sol la máxima altura?
d) ¿Cuántas horas de luz hubo dicho día?

23 Las cisternas de unos aseos públicos se descargan cada minuto. Dibuja en el intervalo de tiempo [0, 4] cuál sería la gráfica de la función que representa el volumen de agua en cada instante. ¿Qué tipo de función es?

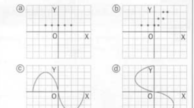
24 Un corredor se prepara para las olimpiadas. Corre los 100 metros lisos y vuelve andando al lugar de partida (en línea recta). Piensa en la función que asocia a cada instante la distancia al punto de partida. Dibuja la posición aproximada en tres carreras. ¿Qué tipo de función es?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

25 Explica si son funciones las siguientes correspondencias:

a) A cada número le hacemos corresponder su raíz cúbica.
b) A cada número entero le hacemos corresponder sus factores primos.
c) A cada número le hacemos corresponder la tercera parte más 1.
d) A cada número real le hacemos corresponder su raíz cuadrada.

26 De las siguientes gráficas, ¿cuáles representan una función?



27 Si dos funciones son iguales, ¿son iguales los dominios? ¿Y los recorridos? Dos funciones tienen el mismo dominio y el mismo recorrido, ¿son iguales?

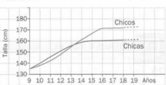
ACTIVIDADES

28 Dibuja gráficas de funciones para responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Una recta perpendicular al eje de abscisas, ¿puede cortar a la gráfica en dos puntos?

b) Una recta paralela al eje de abscisas, ¿puede cortar a la gráfica en dos puntos?

29 ¿Qué información puede deducirse de la siguiente figura donde aparecen las gráficas de la estatura media de chicos y chicas de los 9 a los 18 años?

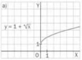


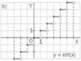
30 ¿Una función puede tener varios máximos absolutos y varios mínimos absolutos? Si es así, dibuja una función que los tenga.

31 La gráfica que expresa la temperatura de un enfermo a lo largo de un día, ¿es continua o es discontinua?

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

32 Escribe el dominio y el recorrido de las siguientes funciones cuyas gráficas son:



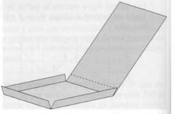


33 El radio de un círculo mide 10 cm. Expresa el área de un rectángulo inscrito en el mismo en función de la medida x de la base. ¿Cuál es el dominio?

34 El radio de un círculo mide 10 cm. Expresa el área de un triángulo isósceles inscrito en el mismo en función de la medida x de la semibase. ¿Cuál es el dominio?

35 Expresa el área de un triángulo equilátero en función del lado cuya medida es x. Halla el valor de esa función si el lado mide 1 m.

36 Se dispone de una cartulina de 100 cm por 40 cm y se quiere construir una caja con tapadera cortando un cuadrado en dos esquinas y dos rectángulos en las otras dos. Halla la expresión del volumen en función del lado x del cuadrado.



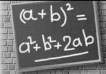
37 Un muchacho sale de Bilbao en bicicleta a las 12.00 horas en dirección a Irún con una velocidad de 12 km/h. Al mismo tiempo su novia sale de Irún con dirección a Bilbao con una velocidad de 18 km/h. La distancia de Bilbao a Irún es de 120 km. Escribe las fórmulas que nos dan en cada instante la distancia de cada uno de ellos a Bilbao. Representa gráficamente ambas funciones en el mismo sistema de ejes de coordenadas. ¿A qué distancia de Bilbao se encontrarán? ¿A qué hora se producirá el encuentro?

38 En nuestra ciudad, la oferta (s) y demanda (d) de un producto cuyo precio es de x euros vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$s(x) = -900 + 18x\,;\ d(x) = 2\,400 - 12x$$

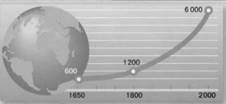
Se llama punto de equilibrio el valor de x para el que el mercado se encuentra en equilibrio $[d(x) = s(x)]$. La ecuación $d(x) = s(x)$ se llama ley de la oferta y la demanda. Calcula gráficamente el punto de equilibrio. Hazlo luego analíticamente.

MURAL DE MATEMÁTICAS



¡NOS SALIMOS DEL CUADRO...!

Hace tres siglos y medio, en 1650, había sobre la Tierra 600 millones de personas. La población tardó siglo y medio en duplicarse, y en 1800 ya había unos 1 200 millones de seres humanos.
A partir de ahí, la humanidad ha crecido (y sigue creciendo) a una velocidad increíble, como refleja esta gráfica.

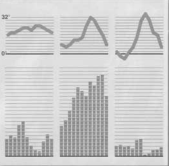


FUNCIONES Y MALA MEMORIA

Los términos "función", "parámetro", "constante" o "variable" que has visto en las últimas páginas son hijos de un matemático, científico y diplomático alemán nacido en 1646, Gottfried Leibniz.
Se dice que, pese a su gran inteligencia y su capacidad para las matemáticas y otras disciplinas, Leibniz tenía muy mala memoria. Por eso apuntaba todas sus ideas, para no olvidarlas. Como además tuvo la buena idea de no tirar esos apuntes, hoy podemos seguir paso a paso las evolución de sus pensamientos.
Además de a las matemáticas, Leibniz dedicaba sus esfuerzos a la lógica, a la biología, a la mecánica y hasta a la cría de gusanos de seda.

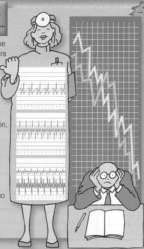
¿QUÉ TAL TIEMPO HIZO EL AÑO PASADO?

Gráficos como estos permiten comprobar, de un solo vistazo, cómo ha sido el tiempo en una determinada ciudad a lo largo de un año.
Las barras grises muestran la cantidad de lluvia caída cada mes, y la línea roja, la evolución de las temperaturas.
Mira estas tres gráficas y trata de adivinar cuál corresponde a la lluviosa San Sebastián, cuál a la cálida y regular Santa Cruz de Tenerife y cuál a Valladolid con sus fríos inviernos.



GRÁFICAS PARA VER LA SALUD DEL CUERPO...

Muchas de las pruebas que nos hacen los médicos para conocer nuestra salud se reflejan luego en gráficas como esfigmogramas, que miden el pulso; electrocardiogramas, que reflejan el latido del corazón, o encefalogramas, que muestran la actividad del cerebro.
Esas gráficas, que a nosotros nos parecen dibujos incomprensibles, son para los médicos como un libro abierto que indica cómo está funcionando nuestro cuerpo.

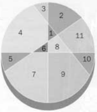


...Y LA DE LA CARTERA

La evolución de los precios, la del desempleo, la línea que siguen los resultados de una empresa... también se suelen reflejar en gráficos que nos ahorran ir calculando uno a uno todos los datos. Si los beneficios de una empresa durante un año siguen una línea como esta, no hace falta mirar mucho más: las cosas marchan francamente mal.

Funciones lineales y funciones cuadráticas

17



Un grupo de alumnos celebra el cumpleaños de un amigo. A la hora de repartir la tarta, a uno se le ocurre preguntar cuántos trozos se obtienen al dar 1, 2, 3, ... n cortes con el cuchillo. En la figura puede verse cuántos trozos se obtienen como máximo con 4 cortes.

En la siguiente tabla se da el número de trozos para los primeros cortes:

Número de cortes	0	1	2	3	4	...
Número de trozos	1	2	4	7	11	...

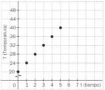
La relación entre cortes y trozos es una función. Pero ¿cuál es la expresión algebraica que relaciona estas dos variables? En esta unidad veremos que la solución de este problema planteado por el alumno es un polinomio de segundo grado y que la gráfica correspondiente es una parábola.

1 Funciones lineales: definición

Se ha medido la temperatura de un líquido a medida que se calentaba. Los resultados aparecen en la siguiente tabla de valores:

Tiempo (min)	0	1	2	3	...	x
Temperatura (°C)	20	24	28	32	...	y

En el margen se han representado los puntos de esta relación; los puntos están situados en una línea recta.

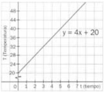


¿Cuál es la expresión algebraica de la relación?

La tabla anterior puede escribirse de otra forma, en donde aparece el aumento de la temperatura según pasa el tiempo:

Tiempo (min)	0	1	2	3	...	x
Temperatura (°C)	20	20 + 4	20 + 8	20 + 12	...	y
	20	20 + 4	$20 + 4 \cdot 2$	$20 + 4 \cdot 3$	...	

Los datos de la tercera fila sugieren la expresión algebraica $y = 20 + 4x$, siendo $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Si tomáramos temperaturas intermedias veríamos que los pares de valores obtenidos estarían también alineados.



Todas las funciones cuya gráfica es una recta son de la forma $y = mx + n$.

> Las funciones de la forma $y = mx + n$ se llaman **lineales**. Su gráfica es un recta.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Calcular los valores de la temperatura dada por la función anterior, $y = 20 + 4x$, siendo el tiempo $x = 10, 12, 15$.**

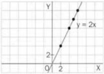
Para $x = 10$ se tiene: $y = 20 + 4 \cdot 10 = 60$
Para $x = 12$ se tiene: $y = 20 + 4 \cdot 12 = 68$
Para $x = 15$ se tiene: $y = 20 + 4 \cdot 15 = 80$

2 **Comprobar que la expresión algebraica que refleja la tabla siguiente es una función lineal. Representarla.**

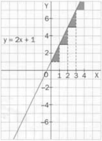
Espacio	4	8	10	12	...	y
Tiempo	2	4	5	6	...	x

Aquí el espacio recorrido es proporcional al tiempo, ya que los cocientes son iguales. La expresión algebraica es $y = 2x$.

Se trata de una función lineal. Su gráfica es una recta.



2 Caracterización de funciones lineales



La gráfica de la función lineal $y = 2x + 1$ está representada en el margen. ¿Cuánto vale la tasa de variación cuando pasa de 1 a 2, de 2 a 3, de 3 a 4 ...? En la tabla siguiente se calcula la tasa para algunos valores:

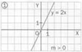
x	1	2	3	4	5	...
y	3	5	7	9	11	...
TV[a, a+1]		2	2	2	2	...

Como vemos, la tasa de variación es constante y coincide con el coeficiente de la x en la función, siempre que la amplitud del intervalo sea 1.

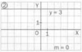
Este resultado es válido para cualquier función lineal $y = mx + n$. Si tomamos un intervalo de amplitud 1, $[a, a + 1]$, la tasa de variación es:

$$TV[a, a + 1] = m(a + 1) + n - (ma + n) = ma + m + n - ma - n = m$$

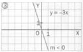
La tasa de variación por unidad de una función lineal se llama también **pendiente** de la recta.



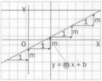
Si la pendiente es **positiva** la función es **creciente**.



Si la pendiente es **nula** la función es **constante**.



Si la pendiente es **negativa** la función es **decreciente**.



La pendiente o tasa de variación por unidad de una función lineal es constante, y recíprocamente.

La pendiente coincide con el coeficiente de la x.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Hallar la función lineal que tiene por pendiente 3 y pasa por el punto A(3, 7).**

Ecuación de la recta: $y = mx + n$

La pendiente es: $m = 3$, luego $y = 3x + n$

Pasa por el punto A(3, 7), luego $7 = 3 \cdot 3 + n$, de donde $n = -2$.

La ecuación de la recta es: $y = 3x - 2$

4 **Hallar la función lineal que pasa por los puntos A(0, 1) y B(1, 4) e indicar su pendiente.**

Ecuación de la recta: $y = mx + n$

Por pasar por el punto A(0, 1): $1 = m \cdot 0 + n = n$

Por pasar por el punto B(1, 4): $4 = m + n$

Resolviendo: $m = 3$, $n = 1$

La ecuación de la recta es: $y = 3x + 1$. Su pendiente es: $m = 3$.

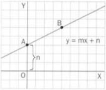
ALGUNAS RECTAS NO SON FUNCIONES

Observa que hay un tipo de rectas, las paralelas al eje y, que no son propiamente funciones, ya que a un valor de x le corresponden infinitos valores de y.

Las ecuaciones de estas rectas son de la forma $x = k$.

3 Representación de funciones lineales

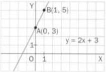
La gráfica de una función lineal $y = mx + n$ es una recta. Por geometría sabemos que dos puntos determinan una recta, es decir, que conocidos dos puntos A y B del plano se puede trazar con una regla la recta que pasa por ellos. En la práctica conviene elegir los puntos más sencillos de calcular, evitando, a ser posible, los números fraccionarios. El punto más fácil de hallar es aquel que tiene por abscisa $x = 0$ y por ordenada $y = n$. Al valor n se le llama **ordenada en el origen**, por ser la ordenada del punto en el que la recta corta al eje OY.



Veamos cómo se representa la función lineal $\mathbf{y = 2x + 3}$.

Determinación de dos puntos de la recta:

Abscisa: x	Ordenada: y	Punto: P(x, y)
0	3	A(0, 3)
1	5	B(1, 5)



La gráfica de la función es la recta que pasa por A(0, 3) y B(1, 5).

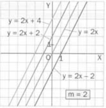
Para representar una función lineal basta dibujar dos puntos de la misma y trazar a continuación con una regla la recta que pasa por ellos.

Rectas paralelas y su representación gráfica

En esta figura se han representado las rectas correspondientes a las funciones lineales: $y = 2x$, $y = 2x + 2$, $y = 2x - 2$, $y = 2x + 4$.

Todas son paralelas. ¿Qué tienen en común?: la pendiente.

Las rectas de las funciones lineales $y = mx + n$ se obtienen por traslación de la recta de $y = mx$ según el vector $\vec{v} = (0, n)$, es decir, verticalmente.



Dos rectas que tienen la misma pendiente son paralelas, y recíprocamente.

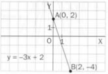
EJERCICIOS RESUELTOS

5 **Representar la función lineal cuya pendiente es −3 y cuya ordenada en el origen vale 2.**

La ecuación de la recta es $y = -3x + 2$. Determinación de dos puntos de la recta:

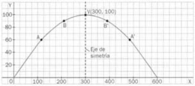
Abscisa: x	Ordenada: y	Punto: P(x, y)
0	2	A(0, 2)
2	−4	B(2, −4)

La gráfica de la función es la recta que pasa por A(0, 2) y B(2, −4).



4 Funciones cuadráticas

Se pretende analizar el funcionamiento de un aparato lanzador de bengalas de salvamento. Para hacer un estudio de la trayectoria se ha dibujado en un sistema de coordenadas algunos puntos determinados por las distancias (eje horizontal) y las alturas correspondientes (eje vertical). La situación de la bengala en esos puntos está dada en la siguiente figura:



La gráfica dibujada, desde el punto de vista geométrico, se llama **parábola**, y desde el punto de vista físico, **trayectoria parabólica**.

El punto más alto de la trayectoria es V(300, 100).

Este punto se llama **vértice de la parábola**.

La recta perpendicular al eje OX que pasa por el vértice es el eje de simetría de la figura.

Los puntos A y A', B y B' son simétricos respecto de este eje.

Lo mismo sucede con los demás puntos.

Este eje de simetría se llama **eje de la parábola**.

En el manual de instrucciones del lanzador se afirma que la altura alcanzada, y, está dada en función del espacio recorrido, x, por la siguiente fórmula:

$$y = -\frac{x^2}{900} + \frac{2x}{3}$$

Las funciones dadas por la expresión $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$ se llaman **funciones cuadráticas.**

Las gráficas de las funciones cuadráticas se llaman **parábolas.**

ARRIBA-ABAJO

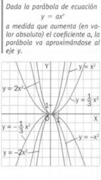
Las parábolas «se abren hacia arriba» si $a > 0$.

Las parábolas «se abren hacia abajo» si $a < 0$.

Dada la parábola de ecuación

$$y = ax^2$$

a medida que aumenta (en valor absoluto) el coeficiente a, la parábola va aproximándose al eje y.



EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Utilizar la fórmula de la trayectoria de la bengala para completar la tabla:**

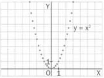
Distancia (x)	100		300	400	500	
Altura (y)		$\frac{800}{9}$	100			0

La tabla completada es:

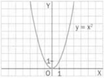
Distancia (x)	100	200	300	400	500	0 ó 600
Altura (y)	$\frac{500}{9}$	$\frac{800}{9}$	100	$\frac{800}{9}$	$\frac{500}{9}$	0

5 Construcción de parábolas a partir de $y = x^2$

La función cuadrática más sencilla es $y = x^2$. Construyamos una tabla de valores y la gráfica correspondiente.



⇒



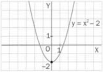
x	y
−3	9
−2,8	7,84
−2,6	6,76
−2,4	5,76
−2,2	4,84
−2	4
−1,8	3,24
−1,6	2,56
−1,4	1,96
−1,2	1,44
−1	1
−0,8	0,64
−0,6	0,36
−0,4	0,16
−0,2	0,04
0	0
0,2	0,04
0,4	0,16
0,6	0,36
0,8	0,64
1	1
1,2	1,44
1,4	1,96
1,6	2,56
1,8	3,24
2	4
2,2	4,84
2,4	5,76
2,6	6,76
2,8	7,84
3	9

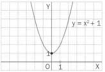
A partir de esta función se pueden obtener otras por traslación. Basta construir en papel transparente la función y luego calcarla según el vector de traslación indicado en cada tipo.

a) Traslación vertical: $y = x^2 + k$

Si $k > 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia arriba k unidades.

Si $k < 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia abajo k unidades.



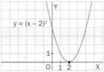


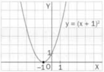
$\vec{u} = (0, k)$

b) Traslación horizontal: $y = (x + h)^2$

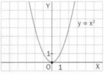
Si $h > 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia la izquierda h unidades.

Si $h < 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia la derecha h unidades.



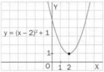


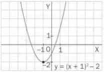
$\vec{u} = (-h, 0)$



c) Traslación oblicua: $y = (x + h)^2 + k$

Se realizan sucesivamente las dos traslaciones anteriores.





$\vec{u} = (-h, k)$

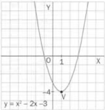
6 Representación de funciones cuadráticas

Para representar una parábola en general, conviene hallar en primer lugar el vértice. Para calcular su abscisa hay que realizar un proceso análogo al que se precisa para resolver la ecuación de segundo grado:

Se parte de:	$y = ax^2 + bx + c$
Se multiplica por 4a:	$4a\,y = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac$
Se suma y resta b^2:	$4a\,y = 4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac - b^2$
Se factoriza:	$4a\,y = (2ax + b)^2 + 4ac - b^2$

Valor de la abscisa en el mínimo o máximo, cuando: $2ax + b = 0$

Por tanto, la abscisa del vértice es la solución de la ecuación $2ax + b = 0$.



Las coordenadas del vértice V(x, y) de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ se obtienen del modo siguiente:

- La abscisa x es la solución de $2ax + b = 0$.
- La ordenada y se obtiene sustituyendo el valor de la abscisa en $y = ax^2 + bx + c$.

VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA

$y = x^2 - 2x - 3$
↓
$2x - 2 = 0$
↓
$x = 1$
↓
$y = -4$
↓
V (1, −4)

Los resultados anteriores permiten dar el siguiente proceso para construir, en general, las gráficas de las parábolas:

a) Se hallan las coordenadas del vértice V(x, y).

b) El eje de simetría es la recta perpendicular a OX que pasa por V.

c) Se fija la parábola hallando dos o más puntos simétricos respecto del eje de simetría. Sus abscisas conviene que sean valores enteros simétricos respecto del eje de simetría.

Un punto fácil de calcular es (0, c), corte con el eje OY y, como consecuencia, su simétrico respecto del eje de la parábola.

Ejercicios resueltos

7 **Dibujar la parábola $y = 2x^2 - 8x + 7$.**

a) Abscisa del vértice: $4x - 8 = 0$, de donde $x = 2$

Ordenada del vértice: $y = 8 - 16 + 7 = -1$

Coordenadas del vértice: V(2, −1)

b) El eje de simetría es la recta vertical a OX que pasa por V: $x = 1$.

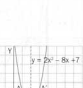
c) Puntos simétricos respecto del eje de simetría:

Para $x = 1$: $y = 2 - 8 + 7 = 1$. Punto A(1, 1).

Para $x = 3$: $y = 18 - 24 + 7 = 1$. Punto simétrico A'(3, 1).

Para $x = 0$: $y = 7$. Punto B(0, 7).

Para $x = 4$: $y = 7$. Punto B'(4, 7).



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Hacer una tabla.
- Buscar relaciones entre los datos de la tabla.
- Comprobar la fórmula hallada.

PROBLEMA

Un grupo de alumnos celebra el cumpleaños de un amigo. A la hora de repartir la tarta, a uno de ellos se le ocurre preguntar cuántos trozos se obtienen al dar 1, 2, 3, ... n cortes con el cuchillo. En la figura puede verse cuántos trozos se obtienen como máximo con cuatro cortes.

HACER UNA TABLA

- En la tabla siguiente se da el número de trozos para los primeros cortes:

Número de cortes	0	1	2	3	4	5	...
Número de trozos	1	2	4	7	11	16	...

BUSCAR UNA RELACIÓN ENTRE LOS DATOS

- a) Probar con una función lineal $y = ax + b$

  Una función lineal queda determinada por dos puntos. Por ejemplo, se eligen los dos primeros: (0, 1) y (1, 2).

  Sustituyendo en $y = ax + b$ se obtiene el sistema:

  $$\left.\begin{aligned} 1 &= \phantom{a +{}} b \\ 2 &= a + b \end{aligned}\right\} \quad \text{Resolviendo el sistema: } a = 1,\ b = 1$$

  La función lineal $y = x + 1$ sirve para relacionar los primeros valores.

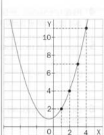
  Esta función lineal no se cumple para los siguientes valores de la tabla. Por ejemplo, para $x = 2$, $y = 2 + 1 = 3 \neq 4$.

  b) Probar con una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$

  Una función cuadrática queda determinada por tres puntos.

  Por ejemplo, se eligen los tres primeros: (0, 1), (1, 2) y (2, 4):

  $$\left.\begin{aligned} 1 &= \phantom{4a + 2b +{}} c \\ 2 &= a + b + c \\ 4 &= 4a + 2b + c \end{aligned}\right\} \quad \text{Resolviendo el sistema: } a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = 1$$



La función cuadrática es: $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + 1$

COMPROBAR

- Veamos si esta función cuadrática se cumple para los siguientes valores de la tabla:

  Para $x = 3$ se tiene: $y = 7$

  Para $x = 4$ se tiene: $y = 11$

  Para $x = 5$ se tiene: $y = 16$

  Este resultado se comprueba también con la gráfica.

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Dados los puntos A(0, 2) y B(2, 3).

a) Representa la función lineal que pasa por ellos.
b) Halla la ecuación de esta función.
c) Calcula la pendiente.

2 ¿Cuánto vale la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas?

a) $y = 5x - 3$
b) $y = 6 - 7x$
c) $y = 4x + 9$
d) $y = 2 - 3x$

3 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

a) A(1, 7) y B(−2, 4)
b) A(0, 1) y B(1, 0)

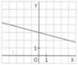
Indica el valor de la pendiente y la ordenada en el origen.

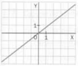
4 Halla la ecuación de la recta de pendiente 5 y que pasa por el punto A(−1, −2).

5 Representa la recta dada por:

a) $y = 2x$
b) $y = 0,5x + 2$
c) $y = -3x$

6 Escribe las ecuaciones de las rectas cuyas gráficas son:





7 Dados los puntos (1, 1), (2, 3), (3, 5) y (4, 7), comprueba si pertenecen a una recta.

8 Dados los puntos (1, 2), (2, 4), (3, 6) y (4, 8), comprueba que la tasa de variación es constante y halla la ecuación de la recta que determinan.

9 Dada la tabla:

x	1	2	3	4	...
f(x)	3	7	11	15	...

Comprueba si determinan una recta y, en caso afirmativo, hállala.

10 Indica cuáles de las siguientes parábolas están abiertas hacia arriba o hacia abajo:

a) $y = 6 - 5x + x^2$
b) $y = 7 + 3x - 4x^2$
c) $y = x + x^2$
d) $y = 9x - x^2$

11 Sin resolver ninguna ecuación, calcula los puntos de intersección con los ejes coordenados de las siguientes funciones:

a) $y = x(x + 1)$
b) $y = (x + 2)(x + 3)$
c) $y = (3 + x)(5 - 6)$
d) $y = 7(x + 1)(x - 5)$

12 Halla los puntos de la función $y = x^2 - 5x + 6$ pertenecientes al eje de abscisas o al de ordenadas.

13 Halla los puntos de la curva $y = x^2 - 1$ cuya ordenada es $y = 3$.

14 Halla los puntos de la curva $y = x^2$ que están en la bisectriz del primer cuadrante.

15 Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$
b) $f(x) = x^2 + x + 1$
c) $y = x^2 - 6x$
d) $y = x^2 - 7x - 18$
e) $y = x^2 - 4x + 7$
f) $y = 3x^2 + 15x + 18$

A C T I V I D A D E S

16 Representa la función $f(x) = 1 + 4x - x^2$ y señala los intervalos de crecimiento o decrecimiento.

17 Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos:

a) $A(-2, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(4, 5)$
b) $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ y $C(2, 3)$

PROBLEMAS PARA APLICAR

18 La tabla siguiente muestra el coste y el número de fotocopias realizadas por algunos alumnos:

	Israel	María	Carlos	...	Luisa
Coste € (y)	0,12	0,60	6	...	0,06
Copias (x)	2	10	100	...	1

Halla la expresión de la función que relaciona el número de copias y su coste.

19 El coste de la energía eléctrica en una casa viene dado por el precio de la potencia contratada, que es 12 €, y el precio del kilovatio hora, que vale 0,15 €.

a) ¿Cuál es la función que da la tarifa conociendo el consumo?
b) ¿Cuánto ha gastado una familia si su consumo ha sido de 200 kilovatios hora?

20 El precio del recibo de la luz viene dado, aproximadamente, por una función lineal $p(k) = a + bk$, donde a representa los gastos de potencia y equipo, y b, el precio del kilovatio hora. De dos recibos sucesivos hemos sacado la siguiente tabla de consumo y precio del recibo (sin IVA):

k	84	61
p(k) €	19,08	16,32

Halla los gastos de potencia-equipo y el precio del kilovatio hora.

21 El coste del teléfono se obtiene mediante un sumando fijo y otro proporcional a la cantidad de pasos consumidos. En dos meses distintos se ha pagado 35,70 € por 340 pasos y 31,14 € por 283 pasos. ¿Cuál es el sumando fijo y el coste del paso?

22 Se ha hecho un estudio de mercado en el que la oferta de un determinado producto viene dada por la expresión $y = 0{,}7x + 8$, y la demanda, por $y = 1{,}3x - 4$. Halla el punto en el que las dos funciones toman el mismo valor.

23 Una finca rectangular debe tener un perímetro de 100 m.

a) Expresa el área del rectángulo en función del lado x de la base.
b) ¿Cuál es el dominio?
c) ¿Cuánto vale el área para $x = 10$ m?
d) Representa la función.

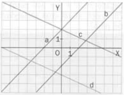
24 Escribe la función que expresa el área de un rectángulo cuyo perímetro es 12 cm. Representa esta función.

CUESTIONES PARA ACLARARSE

25 La longitud de la circunferencia en función del radio, ¿es una función lineal o cuadrática? ¿Y el área del círculo en función del radio?

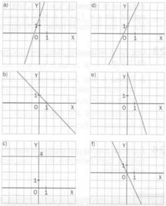
26 Dos funciones lineales tienen la misma pendiente. ¿Qué puede decirse geométricamente de las rectas que determinan en el plano cartesiano?

27 Observando la gráfica siguiente, ¿podrías decir cuál es la ordenada en el origen de cada una de las rectas representadas?



28 Te dan los tres puntos A, B y C del plano cartesiano. ¿Pasa siempre por ellos una recta? ¿Y una parábola?

29 Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de las siguiente gráficas:



30 Dada la recta $y = 3x + 5$, escribe las ecuaciones de dos rectas que sean paralelas a ella y otras dos que no lo sean.

31 De las siguientes rectas, señala cuáles son paralelas:

a) $y = 5x + 2$ c) $y = 4 - 5x$

b) $y = -5x + 7$ d) $y = 5x + 126$

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

32 La temperatura, y, en grados Fahrenheit (°F) puede ser expresada como una función de primer grado de la temperatura, x, en grados Celsius (°C). En la escala Fahrenheit, el agua se congela a 32° y hierve a 212°; en la escala Celsius, se congela a 0 °C y hierve a 100 °C. Expresa la temperatura Fahrenheit, y, como una función de la temperatura Celsius, x. Si la temperatura normal del cuerpo humano es de 98,6 °F, ¿a qué temperatura corresponde en la escala Celsius?

33 Halla una función $f(x) = ax^2 + bx + c$ sabiendo que el vértice es $V(1, 1)$ y pasa por el punto $P(0, 2)$. Dibuja previamente el eje de simetría de la parábola y halla el punto simétrico de P respecto de dicho eje.

34 Expresa el área de un triángulo equilátero en función del lado cuya medida es x. Halla el valor de esa función si el lado mide 10 cm.

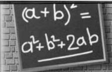
35 Calcula el número de diagonales de los polígonos convexos de 3, 4, 5, 6, ... y calcula luego la expresión de la función cuadrática que da el número de diagonales en función del número de lados.

36 Un anuncio dice que las *pizzas* individuales (23 cm de diámetro) cuestan 4,60 €; las medianas (31 cm de diámetro) cuestan 6,55 €, y las familiares (41 cm de diámetro) cuestan 10,16 €. ¿Se puede encontrar una función que permita hallar el precio de las *pizzas* cualquiera que sea su diámetro?

37 En un monte hay dispersas x casetas de guardas; cada una está unida a las restantes por un camino distinto. Expresa el número de caminos en función de las casetas.

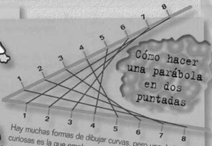
38 La gráfica de una función es una recta paralela a la gráfica de la función $y = 3x$. Escribe su ecuación sabiendo que pasa por el punto $A(3, 5)$.

MURAL DE MATEMÁTICAS



Parábolas deportivas

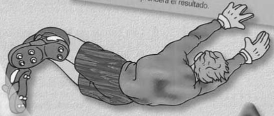
¿Sabes que la parábola es un tipo de curva muy habitual en algunos deportes?
La trayectoria de algunos lanzamientos a canasta en baloncesto, las "vaselinas" que lanzan los futbolistas para superar al portero contrario cuando le ven adelantado o los "globos" de los tenistas tienen esa forma.



Hay muchas formas de dibujar curvas, pero una de las más curiosas es la que emplean tradicionalmente los sastres para cortar telas en forma de parábola. Toma un ángulo cualquiera y marca los dos lados a distancias iguales. Luego numera las marcas empezando en ambos lados por el vértice. Por último une los puntos cuyos valores sumen lo mismo (el primero de un lado y el último del otro, el segundo y el penúltimo...). Te sorprenderá el resultado.

Parabólicas para ver la tele

Seguro que has visto muchas veces una antena parabólica. ¿Por qué se construyen con esa forma? Si se orienta en una dirección, todas las ondas que llegan hasta las paredes de la parábola desde un objeto lejano que esté en esa dirección se reflejan y se juntan en el foco. Así se aprovechan mejor. Ese principio es el que sirve para construir antenas de televisión, en forma de parábola y con el receptor de ondas situado justamente en el foco.



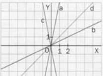
Cuidado con las cuestas

En el código de la circulación existen señales como estas, que sirven para advertir a los conductores de que la carretera es muy empinada hacia arriba o hacia abajo. Junto al dibujo suele escribirse un porcentaje que indica el grado de inclinación. Una cuesta del 15 por ciento, por ejemplo, es aquella en la que por cada cien metros recorridos en horizontal hemos ascendido 15.

Y para ganar la guerra

Y es también el mismo principio que aplicó Arquímedes, hace más de dos mil años, para conseguir que las tropas de su ciudad, Siracusa, vencieran a las naves romanas que la asediaban. El sabio hizo construir unos espejos en forma de parábola. Gracias a ellos logró recoger los rayos del sol y concentrarlos en un punto (el foco de la parábola). Luego apuntó los espejos hacia las velas de los barcos enemigos y estas empezaron a arder. Ingenioso, ¿verdad?

A c t i v i d a d e s



1 Escribe las expresiones de las funciones correspondientes a las gráficas del margen.

2 Las imágenes de 1, 2, 3, 4, ... mediante una función son: $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{6}{9}, \frac{8}{11}, \ldots$

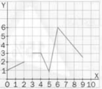
a) ¿Cuál es la expresión algebraica de la función?
b) ¿Cuánto vale para $x = 100$?

3 Un objeto se mueve de modo que, en cada momento, está a una distancia del origen dada por la expresión $e = \frac{5t - 8}{10}$. En esta expresión, e es la longitud medida en centímetros, y t, el tiempo medido en segundos.

a) Dibuja su representación gráfica.
b) Halla la posición del móvil en los instantes $t = 2s$, $t = 5s$.
c) ¿En qué momento pasa por el origen de espacios?

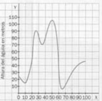
4 Cada paso de una llamada telefónica cuesta 5 céntimos de euro y dura un minuto. Dibuja la gráfica de la función «tiempo-coste». ¿En qué puntos es discontinua?

5 Un grifo llena una probeta dejando caer 5 cm^3 de agua por minuto. Forma una tabla de valores de la función «tiempo-cantidad de agua». Representa gráficamente la función. ¿Es continua la función? Razona tu respuesta.



6 Dada la función representada por la gráfica del margen:

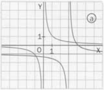
a) ¿Es continua? Indica las posibles discontinuidades.
b) ¿Es creciente en el punto 1?
c) ¿Dónde está el máximo? ¿Y el mínimo?
d) Indica un punto en el que la función decrezca.

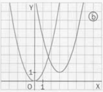


7 La gráfica del margen muestra la altura en metros del vuelo de un águila, en función del tiempo.

a) A los 15 segundos, ¿el águila asciende o desciende?
b) ¿En qué intervalos de tiempo el vuelo es ascendente? ¿En qué intervalos de tiempo el vuelo es descendente?
c) ¿En qué instante alcanza la mínima altura? ¿Y la máxima altura?
d) ¿En qué instante o instantes está el águila a 60 m de altura?
e) ¿Presenta alguna discontinuidad esta función?
f) ¿Se posa el águila en tierra en algún instante?

8 En las gráficas de la derecha, a y b, se puede pasar de una curva a otra mediante una traslación. Escribe los vectores que lo hacen posible.





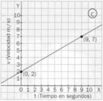
9 La tabla siguiente representa la conversión de velocidades de kilómetros por hora a millas por hora:

km/h	16,1	32,2	48,3	64,4
millas/h	10	20	30	40

Representa dicha función. Si un coche circula a 120 km por hora, ¿cuál será su equivalente en millas por hora?

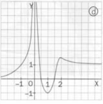
10 La gráfica de la figura c representa un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado de un coche de pruebas.

a) ¿Qué expresión tiene la velocidad en función del tiempo?
b) ¿Qué representa la ordenada en el origen de esta función?
c) ¿Qué tiene que ver la aceleración del coche con la pendiente de la gráfica?



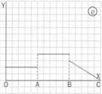
11 Cuando Juan fue a revelar el carrete de fotografías del verano pasado le dijeron que por el revelado del carrete le cobraban un precio fijo de 2 €, y por cada foto, 32 céntimos de euro. ¿Cómo varía el coste de cada foto en un carrete de 36 fotos según el número de fotos que salgan, teniendo en cuenta la incidencia del revelado del carrete?

12 Describe la información que puedes obtener de la gráfica d.



13 Al proyectar una diapositiva sobre una pantalla, el área de la imagen depende de la distancia del proyector a la pantalla, de tal manera que cuando la pantalla está a 1 m del proyector la imagen mide 20 cm × 20 cm. ¿Cómo varía el área de la imagen cuando se aleja el proyector de la pantalla? Representa la función «distancia a la pantalla-área de la imagen».

14 Un labrador tiene 72 metros de valla para hacer un corral de gallinas de forma rectangular. ¿Cómo cambiará el área del corral al variar la longitud de uno de los lados? Forma una tabla de valores y trata de representar gráficamente la función «longitud de un lado-área del corral».



15 A partir de la gráfica e, razona si son verdaderas o no las afirmaciones siguientes:

a) Representa una función.
b) Representa una función creciente entre A y B.
c) En A es discontinua.
d) En el tramo BC es decreciente.

Tablas y gráficas estadísticas

18

En un centro de enseñanza secundaria hay ocho clases de tercero de ESO y se quiere tener una información rápida sobre tres aspectos:

— Autonomía en la que han nacido.

— Número de hermanos.

— Peso de los alumnos.

El profesor de matemáticas selecciona una clase de las ocho y decide realizar allí el estudio, pues piensa que los resultados en las otras serán análogos.

¿Cómo ordenar y presentar los datos de forma clara y que permita operar con ellos? Eso es lo que vamos a estudiar en esta unidad.

1 La información estadística: población y muestra

Supongamos que queremos saber:

a) ¿Cuál es la proporción de votantes a un determinado candidato?

b) ¿Cuántas chinchetas de una cierta marca salen defectuosas?

c) ¿Cuántas horas duran las bombillas de una marca determinada?

Todos estos ejemplos tienen una característica común: se trata de estudiar un conjunto de elementos, potencialmente muy grande, que llamaremos población. Los elementos de la población pueden ser: personas, chinchetas, bombillas, animales, árboles, etc.

En principio, habría que estudiar todos los elementos de la población, pero diversas razones impiden hacerlo, unas veces de carácter intrínseco (las bombillas) y otras de tiempo y dinero.

Por ello elegimos una parte de la población que llamamos **muestra** y realizamos el estudio sobre los elementos de la misma.

Un método muy sencillo para elegir una muestra es asignar un número a cada elemento de la población, se introducen los números en un bombo y se extraen al azar tantos números como elementos queramos que tenga la muestra. Esta forma de elegir la muestra se denomina **muestreo aleatorio**.

Las muestras así elegidas son **representativas** de la población; eso quiere decir que los resultados que obtengamos a partir de ellas serán análogos a los que obtendríamos en la población.

LA INTENCIÓN DE VOTO

En un sondeo de opinión para conocer la intención de voto de los habitantes de una ciudad, la población está formada por el conjunto de todos los ciudadanos con derecho a voto y la muestra es cualquier parte que se extraiga de la población.

Población es el conjunto de todos los elementos que cumplen una determinada característica.

Muestra es cualquier parte de la población.

Muestreo aleatorio es aquel en el que todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser incluidos en la muestra.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **En una fábrica en la que trabajan 600 hombres y 400 mujeres se quiere elegir un comité de 10 personas para entrevistarse con la dirección. ¿Cuál de las muestras siguientes será más representativa?**

a) Se escoge a las 10 primeras personas que llegan al trabajo.

b) Se asigna un número a cada trabajador y se eligen al azar 10 números.

c) Se asigna un número del 1 al 600 a cada uno de los hombres y del 601 al 1 000 a cada una de las mujeres; posteriormente se eligen al azar 6 números entre los asignados a los hombres y 4 entre los asignados a las mujeres.

Evidentemente, la muestra más representativa es la del apartado c, pues además de haber sido elegido aleatoriamente como la b tiene una proporción de hombres y mujeres (6 y 4) análoga a la proporción de hombres y mujeres de la población (600 y 400).

2 Caracteres y variables estadísticos

MODALIDADES

Dentro de un mismo carácter estadístico cualitativo se pueden establecer diferencias. A cada una de estas diferencias se las llama modalidades.

Por ejemplo, son modalidades del carácter «profesión» las siguientes: economista, psicólogo, sociólogo, ingeniero, matemático, biólogo, etc.

En la página de entrada de esta unidad se plantea el estudio del conjunto de alumnos de la clase en relación con tres aspectos distintos: autonomía de nacimiento, número de hermanos y peso en kilogramos. Cada uno de estos aspectos se denomina **carácter estadístico**.

Veamos distintos tipos de caracteres estadísticos con algunos ejemplos:

CARACTERES ESTADÍSTICOS

CUALITATIVOS (no se pueden medir)	CUANTITATIVOS (se pueden medir) dan lugar a VARIABLES ESTADÍSTICAS	
	VARIABLE DISCRETA	VARIABLE CONTINUA
Ejemplos Color de los ojos Estado civil Nacionalidad Deporte preferido	**Ejemplos** Nº de discos vendidos Nº de vecinos Nº de cuentas corrientes de un banco	**Ejemplos** Peso de los alumnos Talla de los alumnos Temperatura Medida del salto de longitud

Carácter estadístico es una propiedad que permite clasificar a los individuos de la población. Puede ser **cualitativo** o **cuantitativo**.

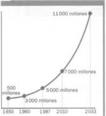
Variable estadística es el conjunto de los valores que toma un carácter estadístico cuantitativo. Puede ser:

- **discreta** cuando solo toma valores aislados;
- **continua** cuando toma todos los valores posibles de un intervalo.

Los valores de una variable estadística se designan por:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_n$$

¿CÓMO CRECE LA POBLACIÓN?



Población mundial en miles de millones y con proyecciones a los próximos años.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 Clasificar los siguientes caracteres estadísticos según sean cualitativos, variables discretas o variables continuas:

a) Profesión de los padres.
b) Diámetro de una pieza de precisión.
c) Carrera que se desea estudiar.
d) Número de acciones vendidas en bolsa.
e) Número de goles marcados en los partidos de fútbol del último domingo.
f) Capacidad del depósito de gasolina de un coche.
g) Número de granos de una espiga.

Son caracteres cualitativos los de los apartados a, c.
Son variables discretas las de los apartados d, e, g.
Son variables continuas las de los apartados b, f.

3 Frecuencias absolutas y relativas

Frecuencia absoluta

Cuando clasificamos a los alumnos de la clase según el número de hermanos se obtuvo la tabla del margen.

En la primera columna hemos situado la variable estadística, en este caso discreta, que representa el número de hermanos.

Observa que hay 3 alumnos que no tienen hermanos. Entonces decimos que la frecuencia absoluta del valor 0 de la variable es 3. Análogamente, para los demás valores de la variable. Por tanto, la segunda columna de la tabla corresponde a la frecuencia absoluta.

Frecuencia absoluta, f_i, de un valor de la variable, x_i, es el número de veces que se repite dicho valor.

La correspondencia que asocia a cada valor de la variable su frecuencia absoluta se llama **distribución estadística**.

TABLA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

Número de hermanos	Número de alumnos
0	3
1	9
2	13
3	2
4	1
5	1
8	1
	30

Frecuencia relativa

Es interesante relacionar la frecuencia absoluta de un valor de la variable con el total de los datos, ya que no es lo mismo que haya 3 alumnos sin hermanos en una clase de 30 alumnos que en todo un colegio de 100.

Esa idea viene reflejada por la frecuencia relativa.

Frecuencia relativa de un valor de la variable, x_i, es el cociente entre la frecuencia absoluta del valor y el número total de datos.

La frecuencia relativa del valor x_i se representa por h_i:

$$h_i = \frac{f_i}{N}$$

donde N es el número total de datos, es decir: $N = f_1 + f_2 + ... + f_n$

TABLA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS Y RELATIVAS

x_i	f_i	h_i
0	3	$\frac{3}{30}$
1	9	$\frac{9}{30}$
2	13	$\frac{13}{30}$
3	2	$\frac{2}{30}$
4	1	$\frac{1}{30}$
5	1	$\frac{1}{30}$
8	1	$\frac{1}{30}$
	30	

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Formar la tabla de frecuencias absolutas y relativas para los siguientes experimentos:**

a) Lanzar 100 veces una moneda.

b) Lanzar 1 000 veces un dado cúbico.

a)

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Cara	64	0,64
Cruz	36	0,36
	100	1

b)

Variable	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	170	0,17
2	185	0,185
3	195	0,195
4	160	0,16
5	120	0,12
6	170	0,17
	1 000	1

4 Frecuencias acumuladas

TABLA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS

Número de hermanos	Número de alumnos
0	3
1	9
2	13
3	2
4	1
5	1
8	1
	30

TABLA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS

x_i	f_i	F_i
0	3	3
1	9	12
2	13	25
3	2	27
4	1	28
5	1	29
8	1	30
	30	

TABLA DE FRECUENCIAS ACUMULADAS ABSOLUTAS Y RELATIVAS

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	3	$\frac{3}{30}$	3	$\frac{3}{30}$
1	9	$\frac{9}{30}$	12	$\frac{12}{30}$
2	13	$\frac{13}{30}$	25	$\frac{25}{30}$
3	2	$\frac{2}{30}$	27	$\frac{27}{30}$
4	1	$\frac{1}{30}$	28	$\frac{28}{30}$
5	1	$\frac{1}{30}$	29	$\frac{29}{30}$
8	1	$\frac{1}{30}$	30	$\frac{30}{30}$
	30	1		

Frecuencia absoluta acumulada

Observa la tabla del margen. ¿Cuántos alumnos tienen un número de hermanos igual o menor que 2?

$$3 + 9 + 13 = 25$$

A ese valor lo llamamos **frecuencia absoluta** acumulada del valor 2.

En el margen se calculan las frecuencias absolutas acumuladas para el resto de los valores de la variable estadística.

Frecuencia absoluta acumulada de un valor de la variable, x_i, es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales a x_i.

La frecuencia absoluta acumulada del valor x_i se representa por F_i:

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$$

Frecuencia relativa acumulada

Si dividimos cada una de las frecuencias absolutas acumuladas, F_i, entre el número total de los datos, se obtiene la frecuencia relativa acumulada:

$$H_1 = \frac{3}{30} \qquad H_2 = \frac{12}{30} \qquad H_3 = \frac{25}{30} \qquad \dots \qquad H_7 = \frac{30}{30}$$

En el margen formamos la tabla completa.

Frecuencia relativa acumulada de un valor, x_i, es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada del valor x_i y el número total de datos.

La frecuencia relativa acumulada del valor x_i se representa por H_i:

$$H_i = \frac{F_i}{N} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_i}{N} = \frac{f_1}{N} + \frac{f_2}{N} + \dots + \frac{f_i}{N} = h_1 + h_2 + \dots + h_i$$

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Formar la tabla de frecuencias absolutas, relativas, absolutas acumuladas y relativas acumuladas para los experimentos del ejercicio 3:**

a)

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
Cara	64	0,64	64	0,64
Cruz	36	0,36	100	1
	100	1		

b)

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
1	170	0,17	170	0,17
2	185	0,185	355	0,355
3	195	0,195	550	0,550
4	160	0,16	710	0,710
5	120	0,12	830	0,830
6	170	0,17	1 000	1
	1 000	1		

5 Tratamiento de los datos. Tablas estadísticas

A continuación vamos a sistematizar cómo debemos proceder ordenadamente con los datos de una muestra:

1. **Recogida de datos.** Consiste en la toma de datos procedentes de la muestra.
2. **Ordenación de los datos.** Una vez recogidos los datos, los colocaremos en orden creciente o decreciente.
3. **Recuento de frecuencias.** Efectuaremos el recuento de los datos.
4. **Agrupación de los datos.** En caso de que la variable sea continua, o discreta con un número de datos muy grande, resulta aconsejable agrupar los datos en intervalos (clases).

   Todas las clases deben tener la misma amplitud.

   Al punto medio de cada clase se le llama **marca de clase**. Con el fin de que la clasificación esté bien hecha, los intervalos se deben construir de tal manera que el extremo superior de una clase coincida con el extremo inferior de la siguiente. Así, en el intervalo [40-45) se contabilizan todos los pesos desde 40 kg (incluido este valor) hasta 45 kg (excluido este valor, que se contabiliza en la siguiente clase).
5. **Elaboración de la tabla estadística.** En ella deberán figurar los valores de la variable (en caso de que se encuentre agrupada en clases los extremos inferior y superior, así como la marca de clase), y las frecuencias absolutas y relativas. A veces es conveniente incluir las frecuencias absolutas acumuladas, las frecuencias relativas acumuladas y los porcentajes.

Las tablas estadísticas del ejemplo de la página de entrada son:

Autonomía de nacimiento

Autonomía	f_i	F_i	h_i	H_i
Andalucía	19	19	$\frac{19}{30}$	$\frac{19}{30}$
Castilla-La Mancha	7	26	$\frac{7}{30}$	$\frac{26}{30}$
Cataluña	2	28	$\frac{2}{30}$	$\frac{28}{30}$
Galicia	1	29	$\frac{1}{30}$	$\frac{29}{30}$
País Vasco	1	30	$\frac{1}{30}$	$\frac{30}{30}$
	30		1	

Tabla de un carácter estadístico cualitativo.

Número de hermanos

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0	3	3	$\frac{3}{30}$	$\frac{3}{30}$
1	9	12	$\frac{9}{30}$	$\frac{12}{30}$
2	13	25	$\frac{13}{30}$	$\frac{25}{30}$
3	2	27	$\frac{2}{30}$	$\frac{27}{30}$
4	1	28	$\frac{1}{30}$	$\frac{28}{30}$
5	1	29	$\frac{1}{30}$	$\frac{29}{30}$
8	1	30	$\frac{13}{30}$	$\frac{30}{30}$
	N = 30		1	

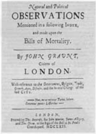
Tabla de variable discreta.

Peso de los alumnos

Peso (kg)	Marca de clase x_i	N.º de alumnos f_i	F_i	h_i	H_i
[40-45)	42,5	1	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$
[45-50)	47,5	3	4	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$
[50-55)	52,5	10	14	$\frac{10}{30}$	$\frac{14}{30}$
[55-60)	57,5	9	23	$\frac{9}{30}$	$\frac{23}{30}$
[60-65)	62,5	4	27	$\frac{4}{30}$	$\frac{27}{30}$
[65-70)	67,5	2	29	$\frac{2}{30}$	$\frac{29}{30}$
[70-75]	72,5	1	30	$\frac{1}{30}$	$\frac{30}{30}$

Tabla de variable continua.

¿SABÍAS QUE...?



En 1662 un mercader de lencería londinense llamado John Graunt (1620-1674) publicó un libro cuya portada reproducimos en el que se hacía una relación detallada sobre las cifras de nacimientos y defunciones en Londres durante el periodo 1604-1661, así como las influencias que ejercían las causas naturales, sociales y políticas de dichos acontecimientos.

6 Representaciones gráficas

A veces es conveniente expresar la información contenida en las tablas estadísticas mediante un gráfico, con el fin de hacerla más clara y evidente. Mencionaremos los principales tipos de gráficos.

DIAGRAMA DE SECTORES

❖ Diagrama de sectores

Se utiliza para comparar las distintas modalidades de un carácter, y consiste en un círculo dividido en tantos sectores circulares como modalidades tiene el carácter.

Para construir un diagrama de sectores, el ángulo central de cada sector ha de ser proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente.

Representamos mediante un diagrama de sectores la distribución estadística que clasifica a los alumnos según la Autonomía de nacimiento. Para el cálculo del ángulo central procedemos así:

Autonomía	Número de alumnos	Medida del ángulo central
Andalucía	19	$\frac{19}{30} \cdot 360° = 228°$
Castilla-La Mancha	7	$\frac{7}{30} \cdot 360° = 84°$
Cataluña	2	$\frac{2}{30} \cdot 360° = 24°$
Galicia	1	$\frac{1}{30} \cdot 360° = 12°$
País Vasco	1	$\frac{1}{30} \cdot 360° = 12°$
	30	

Tabla estadística de un carácter cualitativo.

DIAGRAMA DE BARRAS

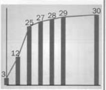


Diagrama de barras acumulado y polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

❖ Diagrama de barras. Polígono de frecuencias

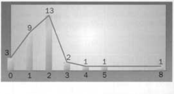
Se utiliza para comparar datos cualitativos o cuantitativos discretos.

Para construir un diagrama de barras se representan sobre el eje de abscisas los datos y en esos puntos se levantan barras proporcionales a las frecuencias absolutas.

Representamos el diagrama de barras asociado a la distribución que clasifica a los alumnos según el número de hermanos.

Número de hermanos	Número de alumnos
0	3
1	9
2	13
3	2
4	1
5	1
8	1

Tabla estadística de una variable discreta.



Si unimos los extremos de las barras obtenemos el polígono de frecuencias.

En el margen representamos el diagrama de barras acumulado y el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

❖ Histograma. Polígono de frecuencias

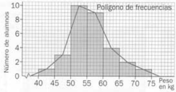
Se utiliza para distribuciones de variable estadística continua o para distribuciones de variable estadística discreta cuyos datos han sido agrupados en clases.

Para construir el histograma se representan sobre el eje de abscisas los extremos de las clases. Se construyen unos rectángulos de base la amplitud del intervalo y de altura la frecuencia absoluta si los intervalos tienen la misma amplitud. En caso contrario, las alturas de los rectángulos se calculan de modo que sus áreas son proporcionales a las frecuencias de cada intervalo.

Representamos el histograma asociado a la distribución que clasifica a los alumnos según su peso en kilogramos.

Peso (kg)	Número de alumnos
[40-45)	1
[45-50)	3
[50-55)	10
[55-60)	9
[60-65)	4
[65-70)	2
[70-75]	1

Tabla estadística de una variable continua.



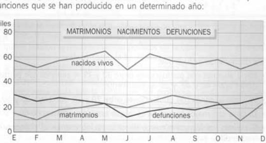
Histograma y polígono de frecuencias.

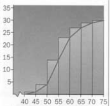
El polígono de frecuencias se obtiene al unir los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo. Con el fin de que el área encerrada bajo el polígono de frecuencias sea igual a la suma de las áreas de los rectángulos, se une el extremo por la izquierda del polígono con la marca de la clase anterior; análogamente, con el extremo por la derecha.

❖ Diagrama lineal

Se utiliza para mostrar las fluctuaciones de uno o varios caracteres estadísticos con el paso del tiempo.

El gráfico siguiente expresa, en miles, los matrimonios, nacimientos y defunciones que se han producido en un determinado año:





Histograma y polígono de frecuencias acumuladas.

¿SABÍAS QUE...?

El término histograma fue utilizado por primera vez por Karl Pearson (1857-1936) en sus conferencias sobre gráficos estadísticos en 1981.

Karl Pearson, inglés, ejerció la abogacía al tiempo que simultaneaba sus actividades políticas y literarias.

A los veintisiete años comenzó a impartir clases de matemáticas aplicadas en la Universidad de Londres.

Se le deben aportaciones importantísimas a la estadística inductora, que es la que actualmente tiene una mayor influencia en todos los campos del saber.

7 Diagramas de tallos y hojas

John Wilder Tukey (1915). Estadístico americano que ha trabajado en la Universidad de Princeton y en el Departamento de Investigación de ATT.Bell.

Sus trabajos más destacados están en el análisis de datos, habiendo desarrollado técnicas tales como los diagramas de tallos y hojas, junto con importantes contribuciones en la teoría de la estimación y de las series cronológicas.

A Tukey se debe el término bit*, contracción de las palabras* binary digit*.*

Una moderna técnica de recogida de datos es la que se conoce como diagrama de tallos y hojas.

Veamos en qué consiste con el siguiente ejemplo:

Las puntuaciones obtenidas por 40 alumnos en un test han sido las siguientes:

41, 53, 72, 62, 81, 93, 81, 74, 56, 62, 45, 47, 62, 58, 88, 76, 77, 63, 43, 56, 76, 63, 78, 73, 65, 66, 91, 82, 61, 72, 36, 50, 91, 32, 60, 80, 51, 68, 61, 71.

Para construir el diagrama de tallos y hojas procedemos del siguiente modo:

Paso 1.º

Se observa entre qué valores están las cifras de las decenas de todos los datos y se tiene que van de 3 a 9:

Tallo	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Paso 2.º

Se va leyendo uno a uno cada dato, anotando la cifra de las unidades de cada uno en la fila correspondiente:

Primer dato 41

Tallo	Hojas
3	
4	1
5	
6	
7	
8	
9	

Segundo dato 53

Tallo	Hojas
3	
4	1
5	3
6	
7	
8	
9	

Y así se continúa con los restantes datos.

Paso 3.º

Cuando los datos han sido anotados, se obtiene una tabla como esta:

Tallo	Hojas
3	6 2
4	1 5 7 3
5	3 6 8 6 0 1
6	2 2 2 3 3 5 6 1 0 8 1
7	2 4 6 7 6 8 3 2 1
8	1 1 8 2 0
9	3 1 1

Paso 4.º

Se vuelve a escribir la tabla ordenando de menor a mayor las unidades dentro de cada fila:

Tallo	Hojas
3	2 6
4	1 3 5 7
5	0 1 3 6 6 8
6	0 1 1 2 2 2 3 3 5 6 8
7	1 2 2 3 4 6 6 7 8
8	0 1 1 2 8
9	1 1 3

Esto es un diagrama de tallos y hojas.

Del diagrama se deduce que:

- Hay 2 alumnos con puntuaciones entre 30 y 39; 4 alumnos con puntuaciones entre 40 y 49, y así sucesivamente.
- Hay más alumnos con puntuaciones entre 70 y 79 que entre 50 y 59.
- La clase con mayor frecuencia es la que tiene de extremos 60-69.
- Si unimos los últimos números de cada fila obtenemos el polígono de frecuencias.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Comparar las gráficas.
- Analizar las escalas sobre los ejes.
- Interpretar los resultados.

PROBLEMA

Esta tabla proporciona la variación del IPC (Índice de Precios al Consumo) en España durante el año 1992, según el Anuario Estadístico:

Meses	*IPC (%)*
Enero	*1,5*
Febrero	*2,2*
Marzo	*2,6*
Abril	*2,5*
Mayo	*2,8*
Junio	*2,8*
Julio	*3,1*
Agosto	*4,0*
Septiembre	*4,9*
Octubre	*5,0*
Noviembre	*5,0*
Diciembre	*5,2*

Pero ciertas organizaciones, para hacer más comprensible la tabla, acompañaron los datos con una representación gráfica.

Reproducimos dos de estas gráficas:

COMPARAR LAS GRÁFICAS

- A primera vista, la gráfica **a** indica una variación muy leve del IPC a lo largo del año, mientras la **b** refleja una fuerte subida.

  Según la gráfica **a** el IPC sube ligeramente de enero a septiembre. La gráfica **b** habla de una subida importante en los períodos que van de enero a marzo y de junio a septiembre.

ANALIZAR LAS ESCALAS

- La escala del eje vertical, donde se refleja la variación del IPC, en la gráfica **b** es más del triple que en **a**. Eso es lo que proporciona la mayor acentuación de las diferencias en **b** sobre **a**.

INTERPRETAR LOS RESULTADOS

- Parece claro que esta diferente elaboración de una y otra gráfica se debe a actitudes interesadas. Aquellos que deseen producir la impresión de que la economía marcha mal (los políticos de la oposición, por ejemplo) se apuntarán a gráficas como la **b**, mientras que los políticos favorables al equipo de gobierno publicarán gráficas como la **a**.

  La mayor o menor corrección de una gráfica, en cuanto a escalas se refiere, viene dada por la naturaleza del problema. Desde el punto de vista actual, el IPC del año 92 fue muy alto, y en este sentido la gráfica **b** es más correcta.

  La estadística es muy útil, pero también muy manipulable. Conviene, por tanto, desarrollar un gran espíritu crítico ante el uso que se hace de ella.

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 En el estudio de una variable x se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias:

x_i	5	7	9	10	13	14
f_i	8	12	17	20	26	30

Representa la distribución mediante un diagrama de barras.

2 Las puntuaciones obtenidas en un test de razonamiento abstracto por 20 alumnos son las siguientes: 16, 22, 21, 20, 23, 22, 17, 15, 13, 22, 17, 18, 20, 17, 22, 16, 23, 21, 22, 18.

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Representa gráficamente la distribución.

3 El ajuste de empleo previsto en los sectores de reconversión más implicados viene dado por la siguiente tabla:

Sector	Frecuencia absoluta (ajuste previsto)
Construcción naval	19 660
Siderurgia integral	17 090
Electrodomésticos	11 320
Línea blanca	10 091
Textil	7 668
Calzado	3 705

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

4 Durante el mes de julio, en una determinada ciudad de la costa levantina se han registrado las siguientes temperaturas máximas: 32, 31, 28, 29, 33, 32, 31, 30, 31, 31, 27, 28, 29, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 30, 30, 31, 30, 31, 34, 33, 33, 28.

a) Forma la tabla de frecuencias.

b) Representa gráficamente la distribución.

5 Se ha controlado el peso de 50 recién nacidos, obteniéndose los siguientes resultados:

Peso (kilogramos)	Número de niños
[2,5-3)	6
[3-3,5)	23
[3,5-4)	12
[4-4,5]	9

a) Forma la tabla de frecuencias.

b) Representa gráficamente la distribución.

6 Los jugadores de un equipo de baloncesto se clasifican por alturas según la siguiente tabla:

Altura	Número de jugadores
[1,70-1,80)	3
[1,80-1,90)	4
[1,90-2,00)	5
[2,00-2,10]	3

a) Forma la tabla de frecuencias.

b) Representa gráficamente la distribución.

7 La población en 1970 se distribuía en zonas urbana, intermedia y rural según la siguiente tabla:

Zona	Población (miles)
Urbana	18 632
Intermedia	6 689
Rural	8 719

Representa gráficamente esta distribución.

8 El tráfico de pasajeros y mercancías del sistema ferroviario ha evolucionado según la siguiente tabla:

Año	Viajeros (millones)	Mercancías (miles de t)
1945	100	25 992
1950	107	29 758
1955	117	34 963
1960	109	34 302
1965	174	30 028
1970	164	30 838

Representa dos diagramas lineales, uno para los viajeros y otro para las mercancías.

9 Se ha aplicado un test de capacidad espacial compuesto por 90 ítems a 100 alumnos de enseñanza primaria, habiéndose obtenido los siguientes resultados:

Número de ítems correctos	Número de alumnos
[0-15)	10
[15-30)	15
[30-45)	25
[45-60)	20
[60-75)	20
[75-90]	10

Forma la tabla de frecuencias y representa gráficamente la distribución.

10 A 1 000 alumnos de enseñanza primaria se les ha aplicado un test sobre satisfacción por el colegio y han contestado:

Gusta mucho	8 %
Gusta	44 %
No gusta	33 %
No gusta nada	15 %

Forma la tabla estadística y representa la situación mediante un diagrama de barras.

11 A los alumnos varones de un centro se les ha tallado y se ha obtenido la siguiente tabla:

Talla (metros)	Número de alumnos
[1,50-1,55)	25
[1,55-1,60)	80
[1,60-1,65)	130
[1,65-1,70)	140
[1,70-1,75)	90
[1,75-1,80]	40

Forma la tabla de frecuencias y representa gráficamente la distribución.

12 Se ha comparado el gasto familiar en España en los años 1970 y 1993 con el fin de observar si han cambiado los hábitos de consumo, y se ha obtenido la siguiente tabla:

Porcentaje sobre el gasto total	1970	1993
Alimentos, bebidas y tabaco	34,8	20,1
Vestido y calzado	9,8	8,1
Alquileres, calefacción y alumbrado	13,6	13,1
Muebles y ajuar doméstico	8,3	6,5
Gasto sanitario	4,4	4,7
Transportes y comunicaciones	9,0	15,2
Espectáculos, enseñanza y cultura	6,0	6,6
Hostelería y turismo	14,1	25,7

Representa dos diagramas de sectores y compara ambas distribuciones.

13 La duración en segundos de las llamadas de una empresa tomadas de un recibo son las siguientes: 120, 131, 142, 157, 15, 27, 94, 57, 62, 12, 49, 58, 149, 210, 120, 131, 97, 84, 61, 32, 15, 7, 21, 32, 238, 210, 48, 56, 139, 24, 64, 31, 23, 58, 69, 234, 13, 66, 54, 214, 156, 179, 231, 204, 147, 32, 15, 7, 64, 124, 56, 73, 114, 169, 201, 134, 62, 93, 42, 58.

a) Agrupa los datos en 8 clases.

b) Forma la tabla de frecuencias completa.

c) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.

d) Representa el histograma acumulado y el polígono de frecuencias acumulado.

14 Se ha medido la duración, en horas, de las pilas de una determinada marca y se ha obtenido lo siguiente: 83, 64, 43, 42, 51, 63, 90, 84, 87, 42, 40, 41, 43, 54, 61, 62, 43, 52, 41, 39, 48, 51, 32, 51, 62, 63, 41, 59, 63, 43, 58, 61, 45, 62.

a) Efectúa el recuento mediante el diagrama de tallos y hojas.
b) Forma la tabla de frecuencias completa.
c) ¿Cuántas pilas duraron menos de 46 horas?
d) ¿Cuántas pilas duraron más de 68 horas?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

15 Se quiere hacer un estudio estadístico sobre tus compañeros de clase; para ello se han tomado datos correspondientes a los siguientes caracteres:

a) Talla.
b) Peso.
c) Número de hermanos.
d) Profesión de su padre.
e) Idioma que estudia.
f) Deporte que practica.
g) Distancia de su casa al centro.
h) Número de habitaciones de su casa.
i) Superficie en metros cuadrados del piso donde vive.

Di cuáles de ellos son cualitativos y cuáles de ellos son cuantitativos discretos y continuos.

16 ¿Cuáles son los pasos que se deben seguir cuando se trata de estudiar una muestra?

17 Pon un ejemplo de variable estadística discreta y otro de variable estadística continua.

18 ¿Cuánto vale la suma de todas las frecuencias relativas?

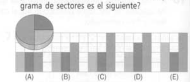
19 María quiere calcular la marca de la clase cuyos extremos son 120, 125. ¿Qué tiene que hacer? ¿Cómo se calcula la marca de clase conocidos los extremos?

20 En una encuesta se quiere estudiar una población compuesta por dos millones de habitantes, de los que el 65 % son mujeres, y se va a escoger una muestra de 2 000 personas para entrevistas. ¿Cuántas mujeres deberán figurar en la muestra?

21 Indica la representación gráfica (diagrama de sectores, diagrama de barras o histograma) que resulta más adecuada para cada una de las siguientes situaciones:

a) Talla.
b) Peso.
c) Número de hermanos.
d) Profesión de su padre.
e) Idioma que estudia.
f) Deporte que practica.
g) Distancia de su casa al centro.
h) Número de habitaciones de su casa.

22 ¿Cuál de los siguientes histogramas podría representar la distribución estadística cuyo diagrama de sectores es el siguiente?



23 En la prensa apareció el siguiente gráfico. Transforma este diagrama de sectores en un diagrama de barras.

MURAL DE MATEMÁTICAS

Estadísticas deportivas

Imagina una gran final de fútbol. Falta muy poco para el final del partido; el marcador señala 0-0 y el árbitro pita penalti a favor del equipo local. ¿A qué jugador elegirá el entrenador para lanzarlo? El "míster" ojea los datos que tiene de sus tres mejores tiradores. El primero ha lanzado 6 penaltis esta temporada y ha metido 4; el segundo tiró 7 y metió 6, y el tercero hizo 2 goles en 5 lanzamientos.

¿A cuál de ellos elegirías tú?

Como ves, la estadística ayuda a tomar decisiones en muchos campos. Pero no garantiza el éxito. Quizá el jugador con mejores datos tiene un mal momento, está nervioso o se equivoca y tira el balón a las nubes. Habrá estropeado sus estadísticas y habrá causado un tremendo disgusto a los aficionados.

El INE lleva las cuentas

¿Cuántas personas encuentran trabajo cada mes en España? Y de ellas, ¿cuántas son mujeres? ¿Y hombres? ¿Cuántos llevaban más de un año buscando empleo? ¿Y cuántos eran jóvenes?

¿Cuántos españoles usan cada día el autobús? ¿Cuánto han subido los precios desde enero? ¿Qué enfermedades son las que afectan más a los hombres de una región determinada?...

A todas esas preguntas, y a muchas más, responde el Instituto Nacional de Estadística (INE). Gracias a las personas que trabajan allí, y a los medios técnicos con los que cuentan, los españoles podemos conocer todos esos datos, que son muy útiles para la política, la economía...

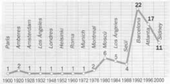
Los gobernantes, los empresarios, los comerciantes... necesitan disponer de esos datos para tomar sus decisiones.

MENTIRAS ESTADÍSTICAS

Benjamin Disraeli fue primer ministro británico en el siglo XIX. Era una persona aguda y brillante que ha dejado muchas frases para la historia. Una de ellas muestra su enorme desprecio hacia la estadística. Decía: "hay tres clases de mentiras: mentiras, malditas mentiras, y estadísticas".

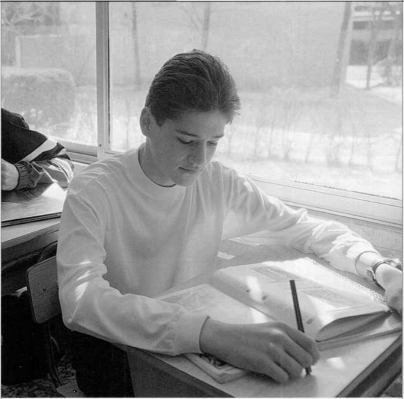
ESTADÍSTICAS OLÍMPICAS

Esta tabla muestra las medallas obtenidas por los equipos olímpicos españoles en los juegos olímpicos a los que han acudido desde 1900. Puedes observar el cambio en los últimos años.



Parámetros estadísticos

19



Las calificaciones de un alumno a lo largo del curso en la asignatura de matemáticas son:

$$6,\ 9,\ 7,\ 6,\ 7,\ 7,\ 6,\ 8,\ 7$$

Al final, el profesor trata de simplificar ese conjunto de datos mediante un valor o parámetro, que es la calificación final del curso o calificación media; en este caso, $\frac{63}{9} = 7$.

En la unidad estudiarás este y otros parámetros estadísticos que permiten simplificar toda la información que proporciona un conjunto de datos.

1 Parámetros de centralización. La media aritmética

Se llama parámetros o medidas de centralización a los parámetros que tienden a situarse hacia el centro del conjunto de datos ordenados. Se les llama también **medidas de tendencia central** o **promedios**.

Las medidas de tendencia central más importantes son: la media aritmética, la moda y la mediana.

Media aritmética

Media aritmética, $\bar{x}$, de una variable estadística es el cociente entre la suma de todos los valores de dicha variable y el número de estos.

Si la variable X toma los valores x_i con frecuencias absolutas f_i la media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{x_1\,f_1 + x_2\,f_2 + \ldots + x_n\,f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Si los datos están agrupados, se toma para x_i las marcas de clase.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Un profesor tiene anotadas en un cuaderno las notas de los 40 alumnos de una clase, y son las siguientes:**

Calificaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N.º de alumnos	2	2	4	5	8	9	3	4	3

Calcular la calificación media.

$$\bar{x} = \frac{212}{40} = 5,3$$

La calificación media es 5,3.

En la práctica, los cálculos se disponen según la tabla del margen.

DISPOSICIÓN DE LOS CÁLCULOS EN FORMA DE TABLA

x_i	f_i	$x_i f_i$
1	2	2
2	2	4
3	4	12
4	5	20
5	8	40
6	9	54
7	3	21
8	4	32
9	3	27
	40	212

2 **Se ha aplicado un test a 88 alumnos, obteniéndose los siguientes resultados:**

Puntuaciones	N.º de alumnos
[38-44)	7
[44-50)	8
[50-56)	15
[56-62)	25
[62-68)	18
[68-74)	9
[74-80]	6

Calcular la puntuación media.

Disponemos los cálculos en la tabla del margen.

La puntuación media es: $\bar{x} = \dfrac{41 \cdot 7 + 47 \cdot 8 + \ldots + 77 \cdot 6}{88} = \dfrac{5\,204}{88} = 59,14$

DISPOSICIÓN DE LOS CÁLCULOS EN FORMA DE TABLA

Clases	Marcas de clase x_i	f_i	$x_i f_i$
[38-44)	41	7	287
[44-50)	47	8	376
[50-56)	53	15	795
[56-62)	59	25	1 475
[62-68)	65	18	1 170
[68-74)	71	9	639
[74-80]	77	6	462
		88	5 204

2 Moda

ESTÁ DE MODA

¿Qué quiere decir que una determinada marca de pantalones vaqueros está de moda?

En la mayoría de los casos quiere decir que son los que más se llevan, es decir, los que se ven por la calle con mayor frecuencia.

Moda de una variable estadística es el valor de dicha variable que tiene mayor frecuencia absoluta.

La moda se representa por $\mathbf{M_o}$.

Si los datos están agrupados en clases se toma como valor aproximado de la moda la marca de la clase que presenta mayor frecuencia absoluta. Esta clase se llama **clase modal**.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Un profesor tiene anotadas en un cuaderno las notas de los 40 alumnos de una clase, y son las siguientes:**

Calificaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N.° de alumnos	2	2	4	5	8	9	3	4	3

Hallar la moda.

La moda es $M_o = 6$, ya que 6 es la calificación que ha obtenido un mayor número de alumnos.

Esta distribución, como solo tiene una moda, es unimodal.

4 **Dada una distribución de frecuencias, su tabla es:**

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	6	7	14	10	14	9

Calcular la moda.

Las modas son $M_o = 3$ y $M_o = 5$, por ser estos dos valores de la variable los que tienen mayor frecuencia. La distribución es bimodal (dos modas).

5 **Se ha aplicado un test a 88 alumnos, obteniéndose los siguientes resultados:**

Puntuaciones	N.° de alumnos
[38-44)	7
[44-50)	8
[50-56)	15
[56-62)	25
[62-68)	18
[68-74)	9
[74-80]	6

Calcular la moda.

La moda es 59, por ser la marca de la clase [56-62) de mayor frecuencia absoluta.

¿CUÁNTAS MODAS?

Una distribución puede no tener moda (si todos los datos tienen la misma frecuencia).

También puede ocurrir que una distribución tenga una moda (unimodal), dos modas (bimodal), tres modas (trimodal).

¿LA MODA ESTÁ EN EL CENTRO?

Aun cuando la moda es una medida de centralización, no siempre tiene que estar situada en la zona central, a veces se encuentra próxima a los extremos.

3 Mediana

Mediana de una variable estadística es un valor de la variable tal que el número de valores menores que él es igual al número de observaciones mayores que él. La mediana se representa por **M**.

Si los datos están agrupados, el **intervalo** o **clase mediana** es el primer intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada es mayor que la mitad del número de datos.

EJERCICIOS RESUELTOS

6 **Dada la serie estadística 11, 3, 5, 9, 12, 2, 6, calcular la mediana.**

Ordenamos los datos: 2, 3, 5, 6, 9, 11, 12

La mediana es M = 6, por ser este el valor central.

7 **Dada la serie estadística 12, 5, 3, 9, 11, 13, 2, 6, calcular la mediana.**

Ordenamos los datos: 2, 3, 5, 6, 9, 11, 12, 13

En este caso hay dos valores centrales, que son 6 y 9; la mediana es:

$$M = \frac{6 + 9}{2} = 7{,}5$$

8 **Calcular la mediana de la distribución de notas siguiente:**

Calificaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N.º de alumnos	2	2	4	5	8	9	3	4	3

La mitad del número total de datos es $\frac{40}{2} = 20$.

Se forma la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas (en el margen).

La mediana es M = 5, dado que es el primer valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada, 21, excede a la mitad del número de datos, 20.

x_i	f_i	F_i
1	2	2
2	2	4
3	4	8
4	5	$13 < 20$
5	8	$21 > 20$
6	9	30
7	3	33
8	4	37
9	3	40
	40	

9 **Calcular la mediana de la distribución de datos agrupados dada por la tabla del margen.**

La mitad del número de datos es $\frac{88}{2} = 44$.

Se añade la columna con las frecuencias absolutas acumuladas.

La clase mediana será el intervalo [56-62), por ser el primer intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada es mayor que la mitad del número de datos. La mediana estará en ese intervalo.

Como aproximación al valor de la mediana, podemos tomar la marca de la clase mediana, es decir, 59.

Puntuaciones	f_i	F_i
[38-44)	7	7
[44-50)	8	15
[50-56)	15	$30 < 44$
[56-62)	25	$55 > 44$
[62-68)	18	73
[68-74)	9	82
[74-80]	6	88
	88	

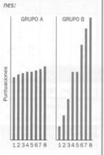
4 Medidas de dispersión. Rango

DOS GRUPOS MUY DISTINTOS

La tabla siguiente representa el número de respuestas correctas de cada alumno a un test de cien preguntas:

Grupo A	Grupo B
46	10
48	18
49	30
50	50
50	50
51	70
52	82
54	90

Representamos el diagrama de barras de ambas distribuciones:



La media, moda y mediana de ambos grupos son todas iguales a 50. En cambio, los dos grupos de alumnos son bien distintos. ¿Qué diferencias observas?

Los parámetros de centralización son insuficientes para el estudio de una distribución.

Medidas de dispersión

Mercedes y Paco forman una pareja con una estatura muy parecida: Mercedes mide 1,69 m, y Paco, 1,71 m. En cambio, Ana y Luis forman una pareja muy singular, pues Ana es muy bajita, solo mide 1,45 m, y su novio, Luis, es jugador de baloncesto y mide 1,95 m.

Si calculas la media de las tallas de Mercedes y Paco obtienes 1,70 m. La media de las tallas de Ana y Luis es también 1,70 m. Lo que diferencia a ambas parejas es su comportamiento respecto a la media.

Es necesario, pues, conocer en qué medida los datos numéricos están agrupados o no alrededor de los valores centrales. A esto es a lo que se llama **dispersión**, y los parámetros que miden las desviaciones respecto de la media se llaman **parámetros de dispersión**.

Las medidas de dispersión más importantes son el rango o recorrido, la varianza y la desviación típica.

Rango

Rango o recorrido de una distribución es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable estadística.

El rango de la pareja Mercedes y Paco es: $1{,}71 \text{ m} - 1{,}69 \text{ m} = 0{,}02 \text{ m}$

El rango de la pareja Ana y Luis es: $1{,}95 \text{ m} - 1{,}45 \text{ m} = 0{,}5 \text{ m}$

Como ambas distribuciones tienen el mismo número de datos y el rango de la segunda es mayor, diremos que está menos concentrada o más dispersa que la otra.

EJERCICIOS RESUELTOS

10 **Calcular el rango de la distribución de notas del ejercicio 8, cuya tabla viene en la página anterior.**

El rango de las notas es $9 - 1 = 8$, ya que la nota máxima es 9 y la mínima 1.

11 **Calcular el rango de la distribución dada por la tabla:**

Puntuación	[38-44)	[44-50)	[50-56)	[56-62)	[62-68)	[68-74)	[74-80]
N.º de alumnos	7	8	15	25	18	9	6

Rango: $80 - 38 = 42$

5 Varianza y desviación típica

Volvamos a las tallas de Ana y Luis. Veamos en qué medida se separan de la media.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \text{talla de Ana} = 1{,}45 \text{ m} \\ x_2 = \text{talla de Luis} = 1{,}95 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} = \text{talla media} = 1{,}70 \text{ m}$$

Las desviaciones respecto a la media son:

$$x_1 - \bar{x} = 1{,}45 - 1{,}70 = -0{,}25 \text{ m}$$
$$x_2 - \bar{x} = 1{,}95 - 1{,}70 = 0{,}25 \text{ m}$$

Los cuadrados de las desviaciones respecto a la media son:

$$(x_1 - \bar{x})^2 = (-0{,}25)^2 = 0{,}0625$$
$$(x_2 - \bar{x})^2 = (0{,}25)^2 = 0{,}0625$$

Si hallamos la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media, obtenemos la varianza.

$$s^2 = \frac{0{,}0625 + 0{,}0625}{2} = 0{,}0625$$

La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$s = \sqrt{0{,}0625} = 0{,}25$$

Varianza de una variable es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media.

Desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

La varianza se representa por $\mathbf{s^2}$, y la desviación típica por **s**.

$$s^2 = \frac{f_1\,(x_1 - \bar{x})^2 + f_2\,(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n\,(x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots f_n} =$$
$$= \frac{f_1\,x_1^2 + f_2 x^2 + \dots + f_n\,x_n^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} - \bar{x}^2$$

EJERCICIOS RESUELTOS

12 **Calcular la varianza y la desviación típica de las notas del profesor cuya tabla reproducimos al margen.**

Ya obtuvimos que la media aritmética es: $\bar{x} = 5{,}30$

- Varianza: $s^2 = \dfrac{1\,296}{40} - (5{,}3)^2 = 4{,}31$
- Desviación típica: $s = \sqrt{4{,}31} = 2{,}08$

13 **Calcular la varianza y la desviación típica de la distribución obtenida al aplicar un test a 88 alumnos, cuya tabla expresamos al margen.**

Ya obtuvimos que la media aritmética es: $\bar{x} = 59{,}14$

- Varianza: $s^2 = \dfrac{315\,592}{88} - (59{,}14)^2 = 88{,}73$
- Desviación típica: $s = \sqrt{88{,}73} = 9{,}42$

DISPOSICIÓN DE LOS CÁLCULOS EN FORMA DE TABLA

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
1	2	2	2
2	2	4	8
3	4	12	36
4	5	20	80
5	8	40	200
6	9	54	324
7	3	21	147
8	4	32	256
9	3	27	243
	40	212	1 296

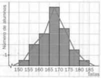
Clases	Marcas de clase x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
[38-44)	41	7	287	11 767
[44-50)	47	8	376	17 672
[50-56)	53	15	795	42 135
[56-62)	59	25	1 475	87 025
[62-68)	65	18	1 170	76 050
[68-74)	71	9	639	45 369
[74-80]	77	6	462	35 574
		88	5 204	315 592

6 Utilización conjunta de la media y la desviación típica

¿SABÍAS QUE...?

Pafnuti Chebyshev (1821-1894), matemático ruso, profesor de la Universidad de San Petersburgo, demostró el importante resultado que estudias en este epígrafe y que se conoce con el nombre de Teorema de Chebyshev.

Ocupó la primera categoría dentro de los matemáticos rusos de su época. Fue miembro extranjero de la Royal Society de Londres y del Instituto Francés, dos de las más importantes instituciones de su época.



Se han anotado las tallas, en centímetros, de 33 alumnos, obteniéndose:

163, 169, 171, 163, 158, 168, 173, 167, 165, 172, 178, 156, 168, 165, 162, 158, 169, 171, 163, 171, 170, 177, 151, 181, 167, 167, 165, 166, 164, 158, 161, 176, 170.

Representamos el polígono de frecuencias y observamos que la distribución es unimodal y bastante simétrica.

Calculamos la media y la desviación típica:

$$\bar{x} = 166{,}76 \text{ cm}$$

$$s = 6{,}47 \text{ cm}$$

Vamos a calcular el porcentaje de personas con estaturas en los siguientes intervalos:

$$(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (160{,}29;\ 173{,}23)$$

Hay 24 personas con estaturas en este intervalo; o sea, el 72 % del total.

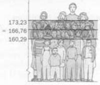
$$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (153{,}82;\ 179{,}70)$$

Hay 31 personas con estaturas en este intervalo; o sea, el 94 % del total.

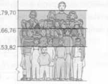
$$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s) = (147{,}35;\ 186{,}17)$$

Hay 33 personas con estaturas en este intervalo; o sea, el 100 % del total.

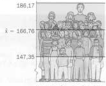
Los siguientes gráficos dan una idea de los resultados obtenidos:



Intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$



Intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$



Intervalo $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$

Estos resultados que acabamos de obtener experimentalmente se generalizan del siguiente modo:

En distribuciones con una sola moda y bastante simétricas se verifica que:

- En el intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ se encuentra el 68 % de los datos.
- En el intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ se encuentra el 95 % de los datos.
- En el intervalo $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ se encuentra el 99 % de los datos.

MUY IMPORTANTE

Cuanto menor es el rango, la varianza o la desviación típica de una distribución, mayor es el grado de representatividad de las medidas de centralización.

7 Estadística y hojas de cálculo

La Estadística, que por su propia naturaleza maneja una gran cantidad de datos, ha encontrado un aliado muy valioso en la Informática, ya que los ordenadores son capaces de realizar, sin equivocarse, miles de operaciones en un segundo.

Una de las herramientas más utilizada en cálculos estadísticos es la **hoja de cálculo**, que permite introducir los datos de una distribución y obtener rápidamente los parámetros de una forma sencilla y elegante.

Cada hoja de cálculo se presenta como una pantalla cuadriculada formada por **filas** (horizontales) y **columnas** (verticales). La intersección de una fila con una columna se llama **celda**. Cada celda se identifica con la letra de su columna y el número de su fila (A1, D5, ...).

Para introducir una información en una celda primero hay que activarla y luego escribir el **texto, dato** o **fórmula** que nos interesa.

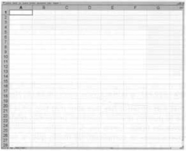
Las fórmulas son operaciones matemáticas que se realizan con los datos de otras celdas. Cuando se activa una celda que contiene una fórmula, en ella se ve el resultado de la operación correspondiente, pero en la parte superior de la hoja se visualiza su expresión.

Para ver cómo funciona una hoja de cálculo vamos a resolver el siguiente ejercicio:

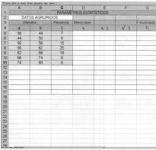
Calcular la puntuación media, la varianza y la desviación típica de la distribución obtenida al aplicar un test a 88 alumnos, cuyos resultados se muestran en la tabla siguiente:

Puntuaciones	N.° de alumnos
[38 - 44)	7
[44 - 50)	8
[50 - 56)	15
[56 - 62)	25
[62 - 68)	18
[68 - 74)	9
[74 - 80)	6

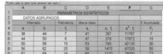
Al abrir la hoja de cálculo de nuestro ordenador aparecerá una tabla similar a la que se muestra:



- Los títulos se introducen en las primeras filas y en las cabeceras de cada columna (en nuestro caso, filas 1, 2, 3 y 4 de la tabla).
- Los datos que se introducen en la tabla son los extremos a y b de los intervalos o clases [a, b) y la frecuencia f_i. Estos datos se sitúan en las celdas amarillas.
- Las fórmulas, que has estudiado en este curso y que permiten calcular la media, la varianza y la desviación típica, se colocan en las celdas rosas. Primero se selecciona la celda, luego se introduce el signo = y a continuación se escribe la fórmula. Las fórmulas se dan en función de las celdas donde se encuentran los datos.



- Si se seleccionan las casillas (D5:F11) y se da la orden de *Rellenar-Hacia abajo* los demás números de la tabla los calcula el ordenador de forma automática e instantánea.



La puntuación media que proporciona la hoja de cálculo es 59,1363636; la varianza, 89,1632231, y la desviación típica, 9,44262798.

Si se tienen más filas de datos hay que abrir más filas en la hoja de cálculo. Con esta tabla se pueden resolver todos los problemas relativos a la media, varianza y desviación típica. Como ves, si los datos numéricos son un poco grandes las operaciones se complican, de modo que, si se hacen a lápiz, el tiempo aumenta al mismo tiempo que las equivocaciones.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Utilizar la calculadora científica.
- Estudiar e interpretar el resultado.

PROBLEMA

Hallar la media y la desviación típica de la distribución que estudia el número de goles por partido marcados en la Liga de Fútbol 86-87.

N.° de goles	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
N.° de partidos	*32*	*71*	*80*	*62*	*36*	*15*	*6*	*2*	*2*

UTILIZAR LA CALCULADORA

- El cálculo de parámetros estadísticos cuando se trata de un número importante de datos es irrealizable sin la ayuda de una calculadora científica. Las calculadoras científicas permiten hallar la media aritmética y la desviación típica simplemente introduciendo los valores de la variable y sus frecuencias absolutas respectivas.

PULSAR LA SECUENCIA DE TECLAS

- 1.° Se selecciona el MODE SD (Statistics Descriptive).
  2.° Se borra la memoria, no sea que haya datos anteriores almacenados.
  3.° Se introducen los datos:
  [0] [x] [32] [ENTER] [1] [x] [71] [ENTER]
  ... [8] [x] [2] [ENTER]
  En algunas calculadoras, la tecla [ENTER] se sustituye por la tecla [DATA]. Conviene revisar el manual antes de ponerse a trabajar.

  4.° Se pulsa la tecla [$\bar{x}$] y se obtiene la media: $\bar{x} = 2{,}29$

  5.° Se pulsa la tecla [σ_n] y se obtiene la desviación típica: $s = 1{,}55$

INTERPRETAR LAS SOLUCIONES

- ¿Es posible que la media sea 2,29? En efecto, ya que, a la vista de la tabla, sin operación alguna podríamos haber estimado que la media estaría entre 2 y 3. Y al estar los datos bastante concentrados la desviación típica será pequeña.
  Se ponen las unidades, en este caso:
  $\bar{x} = 2{,}29$ goles y $s = 1{,}55$ goles.

A C T I V I D A D E S

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

1 Dada la distribución estadística siguiente:
3, 2, 5, 7, 6, 4, 2, 1, 9, 5, 7, 6, 4
Calcula la media aritmética y la desviación típica.

2 Halla la media, la mediana y la moda de la distribución cuya tabla de frecuencias es la siguiente:

x_i	3	6	7	8	10	12
f_i	9	11	4	8	11	7

3 Las calificaciones de Juan en seis pruebas fueron:
87, 64, 92, 86, 69, 71.
Halla la media, la mediana, el rango y la varianza.

4 En un análisis de la sangre de unos pacientes se obtuvieron, en miles por centímetro cúbico, las siguientes cantidades de leucocitos:
9,5; 12; 11,8; 14,5; 10; 17,5; 13,5.
Halla la media, la desviación típica y el rango.

5 Las puntuaciones obtenidas por 20 alumnos en un test de razonamiento abstracto son las siguientes:
16, 22, 21, 20, 23, 22, 17, 15, 13, 22, 17, 18, 20, 17, 22, 16, 23, 21, 22, 18.
Halla la media, el rango y la varianza.

6 Las puntuaciones obtenidas por un grupo de alumnos en unas pruebas deportivas son las siguientes:
3, 2, 5, 7, 6, 4, 2, 1, 9, 5, 7, 6, 4.
Halla la puntuación media y la desviación típica.

7 El número de hijos de 10 familias seleccionadas es el siguiente:
5, 2, 0, 6, 3, 1, 2, 3, 1, 4.
Halla la mediana y la varianza.

8 En una clase de 25 alumnos la calificación media fue 5,7. Otra clase con 37 alumnos tuvo de calificación media 5,4. ¿Cuál es la calificación media de las dos clases?

9 La media de 12 números enteros es 15. Cuando se añade un decimotercer entero, la media es 0. ¿Cuál es el valor del dato añadido?

PROBLEMAS PARA APLICAR

10 Durante el mes de julio, en una determinada ciudad de la costa levantina se han registrado las siguientes temperaturas máximas:
32, 31, 28, 29, 29, 33, 32, 31, 30, 31, 31, 27, 28, 29, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 30, 30, 31, 30, 31, 34, 33, 33.

a) Halla la moda y la mediana.
b) Calcula el recorrido y la desviación típica.
c) Calcula el porcentaje de datos que se encuentra en el intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$.

ACTIVIDADES

11 Los jugadores de un equipo de baloncesto se clasifican por alturas según la tabla siguiente:

Altura	N.º de jugadores
[1,70-1,80)	3
[1,80-1,90)	4
[1,90-2,00)	5
[2,00-2,10]	3

Halla la media, la moda y la desviación típica.

12 Se ha aplicado un test de capacidad espacial, compuesto por 90 preguntas, a 100 alumnos de tercero de ESO, habiéndose obtenido los siguientes resultados:

N.º de respuestas correctas	Número de alumnos
[0-15)	10
[15-30)	15
[30-45)	25
[45-60)	20
[60-75)	20
[75-90]	10

a) Halla la media y la moda.

b) Calcula el rango y la varianza.

13 La temperatura que ha marcado un termómetro en los diferentes días de la semana ha sido:

Día	Máxima	Mínima
Lunes	19	4
Martes	18	−2
Miércoles	21	−3
Jueves	13	1
Viernes	12	4
Sábado	14	0
Domingo	22	3

Halla:

a) La temperatura media máxima.

b) La temperatura media mínima.

c) La media de las oscilaciones extremas diarias.

14 Se ha controlado el peso de 50 recién nacidos, obteniéndose los siguientes resultados:

Peso (kg)	N.º de niños
[2,5-3)	6
[3-3,5)	23
[3,5-4)	12
[4-4,5]	9

Halla la media y la desviación típica.

15 Se han obtenido las siguientes puntuaciones en un test de habilidad mental:

50, 23, 45, 36, 56, 34, 56, 67, 45, 34, 23, 45, 23, 67, 54, 21, 34, 43, 12, 78, 36, 49, 53, 27, 66, 31, 45, 22, 33, 44, 48, 53, 57, 77, 31, 23, 47, 52, 33, 37, 64, 21.

a) Calcula el porcentaje de alumnos con puntuación superior en cinco unidades a la media.

b) Comprueba si en el intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ se encuentra aproximadamente el 68 % de los datos.

16 La media de x, $4x - 3$, $x + 4$, -16, 9 y $x - 5$ es 4. ¿Cuánto vale la mediana de estos siete números?

17 Encontrar la media de los 1 000 primeros números naturales.

18 Se considera un número de 4 cifras: la media de las dos primeras cifras es 7, la media de las dos cifras centrales es 2,5 y la media de las dos últimas es 8,5. Halla la media de la primera y la cuarta cifra.

19 La siguiente serie de datos:

18, 21, 24, a, 36, 37, b

está ordenada y tiene de mediana 30 y de media 32. Encuentra el valor de a y b.

20 Cinco números enteros positivos tienen de media 12 y de rango 18. La moda y la mediana son ambas 8. Ordenados los números de mayor a menor, ¿qué valores puede tener el segundo número?

A C T I V I D A D E S

21 Utiliza la tabla de la hoja de cálculo para resolver los ejercicios de esta unidad y compara los resultados que obtengas con los del libro.

22 Utiliza la tabla de la hoja de cálculo para ver qué sucede cuando se suma o resta el mismo número a la variable x_i manteniendo la frecuencia.

a) ¿Varía la media? ¿En cuánto?
b) ¿Varía la varianza? ¿En cuánto?
c) ¿Varía la desviación típica? ¿En cuánto?

23 Utiliza la tabla de la hoja de cálculo para ver qué sucede cuando se multiplica por el mismo número positivo la variable x_i manteniendo la frecuencia.

a) ¿Varía la media? ¿En cuánto?
b) ¿Varía la varianza? ¿En cuánto?
c) ¿Varía la desviación típica? ¿En cuánto?

24 Utiliza la tabla de la hoja de cálculo para ver qué sucede cuando se suman dos distribuciones con la misma frecuencia.
¿Varía la media? ¿Qué relación hay entre la media de los sumandos y la media de suma?

CUESTIONES PARA ACLARARSE

25 En una distribución en la que se estudia la talla de 500 personas se sabe que la mediana es igual a 1,67 m. ¿Qué quiere decir?

26 Si los números 6, 7, 8, 9 y 12 los multiplicamos por 2, se obtiene 12, 14, 16, 18 y 24. ¿Qué puedes decir de las medias y las varianzas de ambas series estadísticas?

27 Si a los números 6, 7, 8, 9 y 12 les sumamos 6, se obtiene 12, 13, 14, 15 y 18. Compara las medias aritméticas y las varianzas de ambas series.

28 ¿Influyen todos los datos en el cálculo de la moda?

29 Si dos distribuciones tienen el mismo número de datos y los rangos son 7 y 25, ¿cuál estará menos dispersa?

30 Fíjate que para hallar la varianza hay que elevar al cuadrado las desviaciones respecto a la media; por ello, la varianza no se expresa en las mismas unidades que los datos. De manera que si los datos se expresan en metros, ¿en qué unidades se expresará la varianza?

31 ¿En cuál de los parámetros, media, moda y mediana, influye el orden?

32 ¿Puede ser la varianza negativa? Razona la respuesta.

33 En una distribución intervienen 600 personas. Se sabe que es unimodal y bastante simétrica. Se tiene que la media aritmética es 50 y la desviación típica es 7. ¿Cuántas personas se distribuirán en el intervalo (43, 57)?

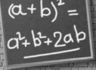
34 Las puntuaciones de Cristina en cuatro pruebas son 7, 6, 5 y 5. ¿Cuánto debe sacar en la quinta prueba para que la media de las cinco pruebas sea 4?

35 La media de una lista de 10 números es 8. Si se añaden a la lista 17 y -1, ¿cuál es el valor de la nueva media?

36 En cinco pruebas donde se puntúa de 1 a 100, ambos inclusive, Aitor ha tenido una puntuación media de 88 puntos. ¿Cuál es la puntuación más baja que puede tener en la prueba?

37 La media y la mediana de un conjunto de cinco números naturales distintos es 7 y el rango es 6. Halla los cinco números.

MURAL DE MATEMÁTICAS



El hijo del viento

Carl Lewis, el "hijo del viento", es uno de los mejores atletas de la historia. Ha logrado nueve medallas de oro en pruebas de carreras y saltos en distintas ediciones de los Juegos Olímpicos. Cuatro de ellas las obtuvo en salto de longitud. Sus marcas fueron:

Los Ángeles '84	**8,54 m**
Seúl '88	**8,72 m**
Barcelona '92	**8,67 m**
Atlanta '96	**8,50 m**

¿Cuál es la marca media de sus mejores saltos en cada olimpiada?

UNA MEDIA MENTIROSA

Imagina que tuvieras sobre la cabeza una bolsa con agua muy caliente (a 50 grados) y los pies metidos en un cubo de hielo a 0 grados.
Tu temperatura media sería estupenda (25º), pero lo más probable es que no te sintieras muy a gusto. Como ves, la media entre dos datos no siempre es útil para reflejar bien la realidad.

El "maillot" verde

En el Tour de Francia, la carrera ciclista más importante del mundo, el líder es el que menos tiempo ha invertido en recorrer las etapas disputadas en cada momento. Entonces se pone el "maillot" amarillo. No importa si no ha ganado ninguna etapa o si en una de ellas quedó el último. Un ciclista puede ser líder aunque quede fatal en todas las etapas, si en una consigue escaparse y sacar muchísimo tiempo a todos los demás.
Pero hay otra clasificación a la que apenas se da importancia: la de la regularidad. En este caso no se cuenta el tiempo, sino la media de los puestos que ha ocupado un ciclista en cada etapa.
El "maillot" verde que distingue al líder de la regularidad indica que ese ciclista ha llegado en la mayoría de las etapas entre los mejores.

Galton
Estadísticas para todo

¿Tú crees que se podría calcular estadísticamente si las oraciones que dirigimos a Dios son eficaces? ¿Y la distribución de buenas personas en una determinada región? Parecen ideas descabelladas y seguramente lo son, pero Francis Galton creía tanto en la fuerza de los datos que intentó reunir estadísticas como esas.
Pero no estaba loco. Al margen de esas ideas tan raras e irrealizables tuvo otras mucho más sensatas que hacen que se le considere uno de los padres de la actual estadística. Vivió el siglo pasado en Inglaterra y, aunque iba para médico, luego se dedicó a materias tan variadas como la meteorología, la antropología y la genética. Se cree que fue la primera persona que hizo un "mapa del tiempo" con datos que recogió en un montón de observatorios astronómicos. Fue también el primero en demostrar, tras estudiar miles de huellas dactilares, que las de cada persona son únicas. Sus métodos estadísticos revolucionaron la forma de analizar los datos.

Sucesos aleatorios. Probabilidad

20

Este cuadro, obra del pintor sevillano Bartolomé Esteban Murillo (1618-1682), representa a unos niños jugando a las cartas en la calle. Desde la antigüedad los hombres se han distraído con los juegos de azar.

Precisamente los juegos de azar fueron el origen de la teoría de probabilidades; pero aunque la mayoría de los juegos de azar son tan antiguos como la humanidad misma, el cálculo de probabilidades no surgió hasta finales del siglo XVI y principios del siglo XVII.

Hoy en día el cálculo de probabilidades no solo se ocupa de problemas asociados a los juegos de azar, sino que junto con la estadística interviene en otros ámbitos de la vida. Algunas aplicaciones son los estudios sobre expectativas de vida con el fin de fijar las primas de seguros, el análisis de las previsiones de voto ante unas elecciones, o el estudio de marketing para lanzar un nuevo producto al mercado.

1 Experiencias y sucesos aleatorios. Espacio muestral

La foto representa las extracciones de bolas de un bombo para los sorteos de la Lotería Nacional. En cada extracción se obtiene un número, que puede ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9.

Por muchas extracciones que hayamos realizado jamás podremos predecir el resultado que obtendremos en una próxima extracción. A los experimentos que cumplen esta condición se los llama **experimentos aleatorios**.

Un experimento es aleatorio cuando no se puede predecir el resultado que se va a obtener al realizarlo.

Espacio muestral es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento. Se designa por E y a sus elementos se los llama puntos muestrales.

Suceso aleatorio es cualquier conjunto formado por uno o más elementos del espacio muestral.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **De los siguientes experimentos, ¿cuáles son aleatorios?**

a) Extraer una carta de una baraja y anotar a qué palo pertenece.

b) Lanzar una moneda al suelo y esperar que se pose sobre una de sus caras y anotar el resultado de la cara superior.

c) Arrojar una piedra al vacío y medir su aceleración.

d) Lanzar un dado de quinielas (en cuyas caras están escritos los símbolos 1, X, 2) y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.

e) Medir la longitud de una circunferencia de radio 3 cm.

f) Abrir las compuertas de un estanque lleno de agua y anotar qué ocurre.

Son experimentos aleatorios los de los apartados a, b y d, ya que por muchas veces que se repitan bajo análogas condiciones jamás podremos predecir el resultado que vamos a obtener.

En cambio, los experimentos de los apartados c, e y f no son aleatorios, ya que de antemano sabemos el resultado que vamos a obtener.

LA FUNCIÓN DEL AZAR

Hoy día es posible realizar simulaciones de experimentos aleatorios con una calculadora o un ordenador, debido a que tienen incorporada una función llamada RANDOM que permite generar números aleatorios.

Por ejemplo, se pueden obtener simulaciones de lanzamientos de monedas, dados, extracciones de cartas de una baraja, etcétera, con la misma exactitud que si efectuáramos las pruebas, y en muy poco tiempo.

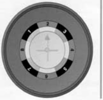
¿SABÍAS QUE...?

Hacia el año 1900 el estadístico inglés Karl Pearson (1857-1936) lanzó una moneda 24 000 veces y obtuvo 12 012 caras.

2 Tipos de sucesos

IDEA DE SUCESO CIERTO

Al accionar la aguja de la ruleta de la figura es seguro que se obtiene un número menor o igual a 8.



Consideremos el experimento aleatorio asociado al lanzamiento de un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6.

Sucesos elementales son los formados por un solo resultado:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

Sucesos compuestos son los formados por más de un resultado:

Salir par = $\{2, 4, 6\}$. Salir múltiplo de 3 = $\{3, 6\}$

Suceso cierto o seguro es el que siempre se realiza:

Salir número menor que 7 = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso imposible es el que nunca se realiza.

Salir número negativo.

IDEA DE SUCESO IMPOSIBLE

Al accionar la aguja de la ruleta anterior es imposible obtener un número mayor que 10.

Suceso contrario

Consideremos el suceso salir par $A = \{2, 4, 6\}$, el suceso $\overline{A}$ = «salir impar» = $\{1, 3, 5\}$ se denomina suceso contrario de A.

Al conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se le denomina **espacio de sucesos** y se designa por S.

Suceso elemental es el que está formado por un solo resultado.
Suceso compuesto está formado por más de un resultado.
Suceso cierto o seguro es el que siempre se realiza. Se designa por E.
Suceso imposible es el que nunca se realiza. Se designa por Ø.
Suceso contrario de A es el que se realiza cuando no se realiza A. Se designa por $\overline{A}$.

EJERCICIOS RESUELTOS

2 Estudiar el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado de quinielas y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.

Espacio muestral:	$E = \{1, X, 2\}$
Espacio de sucesos:	$S = \{Ø, \{1\}, \{X\}, \{2\}, \{1, X\}, \{1, 2\}, \{2, X\}, \{1, X, 2\}\}$
Sucesos elementales:	$\{1\}; \{X\}; \{2\}$
Algunos sucesos compuestos:	$A = \{1, X\}; B = \{1, 2\}$
Suceso cierto:	$E = \{1, X, 2\}$
Suceso imposible:	Ø

3 Operaciones con sucesos

Unión de sucesos

En el experimento aleatorio del lanzamiento del dado, cuyo espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, consideremos los siguientes sucesos:

A = «salir par» $= \{2, 4, 6\}$
B = «salir número primo» $= \{2, 3, 5\}$

Formemos el suceso:

C = «salir par o número primo» $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Este suceso se llama suceso unión de A y B.

> Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, llamamos **suceso unión** de A y B al suceso que se realiza cuando se realiza A o B. Está formado por los puntos muestrales de A o B.
> El suceso A unión B se representa por $\mathbf{A \cup B}$ o por **A o B**.

Intersección de sucesos

Consideremos nuevamente los sucesos A y B del ejemplo anterior:

A = «salir par» $= \{2, 4, 6\}$
B = «salir número primo» $= \{2, 3, 5\}$

Formemos el suceso D = «salir par y número primo» $= \{2\}$.

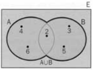
Este suceso se llama suceso intersección de A y B.

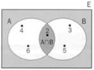
> Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, llamaremos **suceso intersección** de A y B al suceso que se realiza cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B. Está formado por los puntos muestrales comunes a los sucesos A y B.
> El suceso A intersección B se representa por $\mathbf{A \cap B}$ o por **A y B**.

Si la intersección de dos sucesos es el suceso imposible se dice que los sucesos son **incompatibles**. En caso contrario, se llaman **compatibles**.

> Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se tiene:
> Si $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B son incompatibles.
> Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces A y B son compatibles.

UNIÓN E INTERSECCIÓN





EJERCICIOS RESUELTOS

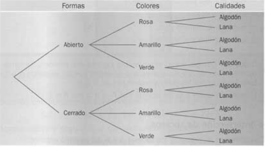
3 Calcular la unión y la intersección de los siguientes sucesos:

$A = \{1,2,5\}$	y $B = \{2,3,5\}$	$\Rightarrow$	$A \cup B = \{1,2,3,5\}$;	$A \cap B = \{2,5\}$
$C = \{2,4,6\}$	y $D = \{2,5\}$	$\Rightarrow$	$C \cup D = \{2,4,5,6\}$;	$C \cap D = \{2\}$
$F = \{1,3\}$	y $G = \{1,3,6\}$	$\Rightarrow$	$F \cup G = \{1,3,6\}$;	$F \cap G = \{1,3\}$
$H = \{3\}$	y $I = \{5\}$	$\Rightarrow$	$H \cup I = \{3, 5\}$;	$H \cap I = \emptyset$
$M = \{2,5\}$	y $N = \{1,3,6\}$	$\Rightarrow$	$M \cup N = \{1,2,3,5,6\}$;	$M \cap N = \emptyset$
$P = \{2,4\}$	y $Q = \{1,6\}$	$\Rightarrow$	$P \cup Q = \{1,2,4,6\}$;	$P \cap Q = \emptyset$

4 Técnicas de recuento. Diagrama en árbol

Vanesa quiere regalar a su hermana por su cumpleaños un jersey, pero duda si abierto o cerrado; rosa, amarillo o verde; y de algodón o de lana. ¿Cuántas posibilidades tiene?

Observa el siguiente **diagrama en árbol**:

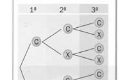


formas posibles	x colores posibles	x calidades posibles
2	x 3	x 2 = 12

Por tanto, tiene 12 posibilidades de elegir jersey.

> Si un primer experimento tiene m resultados distintos y un segundo experimento tiene n resultados distintos, entonces el número de resultados distintos para los dos experimentos es $m \cdot n$.

TRES MONEDAS



EJERCICIOS RESUELTOS

4 Se lanzan tres monedas. Formar el espacio muestral.

En el margen formamos el diagrama en árbol para este experimento.

E = {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}

5 Se lanzan una moneda y un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

Como la moneda tiene 2 posibilidades y el dado 6, el espacio muestral tendrá 12 elementos.

6 Se lanzan una moneda y un dado y se extrae una carta de una baraja. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

posibilidad de la moneda × posibilidad del dado × posibilidad de la baraja

$2 \times 6 \times 40 = 480$

El espacio muestral estará formado por 480 resultados distintos.

5 Probabilidad de sucesos. Ley de Laplace

En una rifa se han hecho 100 000 papeletas con los números del 1 al 100 000. Como todos los números son igualmente probables, si se compra una papeleta diremos que hay una oportunidad entre 100 000 de ganar el premio; o también que la probabilidad de ganar es:

$$\frac{1}{100\,000}$$

Si se compran 100 papeletas tendremos 100 oportunidades entre 100 000 de ganar. Diremos que la probabilidad de ganar es:

$$\frac{100}{100\,000}$$

A las oportunidades se les llama **casos favorables**, y al total de resultados del experimento, **casos posibles**.

En 1812 el matemático francés Pierre Simon de Laplace dio la primera definición de probabilidad, que dice así:

> Si todos los resultados de un experimento son equiprobables, se tiene que:
>
> $$\text{probabilidad de un suceso} = \frac{\text{n.º de casos favorables al suceso}}{\text{n.º de casos posibles}}$$

RECUERDA

Dos sucesos son equiprobables cuando tienen la misma probabilidad.

La definición de Laplace solo se puede aplicar cuando los sucesos elementales del experimento son equiprobables.

LAPLACE

Pierre Simon Laplace (1749-1827), astrónomo, físico y matemático francés, fue autor de la Teoría analítica de las probabilidades. *Napoleón le otorgó el título de marqués de Laplace.*

EJERCICIOS RESUELTOS

7 Lanzamos un dado. Hallar la probabilidad de obtener:

a) Un número impar.

b) Un múltiplo de 3.

El espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Los sucesos cuya probabilidad nos piden son:

a) A = «obtener un número impar» = {1, 3, 5} $\Rightarrow p(A) = \frac{3}{6}$

b) C = «obtener un múltiplo de 3» = {3, 6} $\Rightarrow p(C) = \frac{2}{6}$

8 Lanzamos dos monedas. Hallar las siguientes probabilidades:

a) Obtener dos caras.

b) Obtener al menos una cruz.

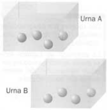
El espacio muestral es E = {CC, CX, XC, XX}.

Los sucesos cuya probabilidad nos piden son:

a) A = {CC} $\Rightarrow p(A) = \frac{1}{4}$

b) D = {CX, XC, XX} $\Rightarrow p(D) = \frac{3}{4}$

6 Propiedades de la probabilidad



La taba se fue redondeando y dio lugar al dado.

1. El contrario del suceso cierto es el suceso imposible; es decir:

$$\overline{E} = \varnothing$$

2. El contrario del suceso imposible es el suceso cierto; es decir:

$$\overline{\varnothing} = E$$

$$A \cup \overline{A} = E \text{ y } A \cap \overline{A} = \varnothing$$

Escala de probabilidad

Observa las urnas A y B del margen. Extraemos una bola de una urna y queremos hallar la probabilidad de que sea verde.

En la urna A es imposible extraer una bola verde. Hay 0 oportunidades entre 4. $p(\varnothing) = \frac{0}{4} = 0$

En la urna B es seguro extraer una bola verde. Hay 4 oportunidades entre 4. $p(E) = \frac{4}{4} = 1$

Cualquier otra composición de la urna con cuatro bolas rojas y verdes nos daría que la probabilidad de extraer una bola verde es un número comprendido entre 0 y 1.

La probabilidad del suceso imposible es 0.
La probabilidad del suceso seguro es 1.
La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.

Probabilidad del suceso contrario

En una bolsa hay 7 bolas blancas, 3 verdes y 2 rojas. Consideramos el suceso A = «Sacar una bola blanca». Su probabilidad es $p(A) = \frac{7}{12}$.

El suceso contrario de A es $\overline{A}$ = «Sacar una bola verde o roja». Su probabilidad es $p(\overline{A}) = \frac{5}{12}$.

Observa que todos los sucesos elementales (las 12 bolas) se han tenido en cuenta en A o en $\overline{A}$. La suma de todos los casos favorables es entonces igual al número de casos posibles. Por tanto:

$$p(A) + p(\overline{A}) = \frac{7}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1 \Rightarrow p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

9 Una urna contiene 20 bolas rojas, 15 azules y 7 verdes. Se extrae una bola. Hallar la probabilidad de que sea roja o verde.

Si representamos por R = «obtener una bola roja», A = «obtener una bola azul» y V = «obtener una bola verde», se tiene:

$$p(\text{roja o verde}) = p(R \cup V) = 1 - p(A) = 1 - \frac{15}{42} = \frac{27}{42}$$

7 Probabilidad de la unión de sucesos

❖ Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

Para el experimento del lanzamiento del dado consideremos los sucesos:

$$A = \{2, 4, 6\}.\ B = \{5\};\ A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

Si calculamos probabilidades, resulta:

$$p(A) = \frac{3}{6};\ p(B) = \frac{1}{6};\ p(A \cup B) = \frac{4}{6} = p(A) + p(B)$$

> Si dos sucesos, A y B, son incompatibles, se verifica:
> $$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

❖ Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

Lanzamos un dado y consideremos los sucesos:

A = «obtener un número impar» $= \{1, 3, 5\} \Rightarrow p(A) = \frac{3}{6}$

B = «obtener un múltiplo de 3» $= \{3, 6\} \Rightarrow p(B) = \frac{2}{6}$

Estos sucesos son compatibles. Entonces:

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{4}{6}$, y $A \cap B = \{3\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Con estos resultados podemos comprobar la relación:

$\frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, es decir, $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$

Y despejando $p(A \cup B)$: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

> Si A y B son dos sucesos compatibles, se verifica:
> $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Ejercicios resueltos

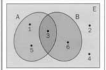
10 **En el experimento de extraer una carta de una baraja española se consideran los sucesos: A = «obtener un oro», B = «obtener un rey» y C = «obtener el as de espadas». Hallar la probabilidad de $A \cup B$ y $A \cup C$.**

A y B son compatibles, pero A y C son incompatibles; entonces:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

$$p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \frac{10}{40} + \frac{1}{40} = \frac{11}{40}$$

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN



Si A y B son dos sucesos compatibles de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la probabilidad de la unión de A y B es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos menos la probabilidad del suceso intersección de A y B.

¿SABÍAS QUE...?

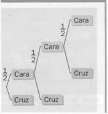
El juego de las cartas no se inventó hasta el siglo XIV, pero como el precio de las cartas no era asequible a la mayoría de las personas tardó mucho en implantarse.

8 Probabilidad de sucesos en experimentos compuestos

Vamos a ver la forma de hallar la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto a partir de las probabilidades de los sucesos de los experimentos simples que lo componen.

Para ello resolveremos los siguientes ejemplos, primero aplicando la definición de Laplace y posteriormente como producto de probabilidades de los sucesos de los experimentos simples.

SE LANZA UNA MONEDA TRES VECES



EJERCICIOS RESUELTOS

11 **Lanzamos tres veces una moneda. Hallar la probabilidad de obtener tres caras.**

El espacio muestral es:

E = {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}

Casos favorables: 1. Casos posibles: 8.

$$p(C \text{ y } C \text{ y } C) = p(C \cap C \cap C) = \frac{1}{8}$$

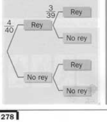
Observa el diagrama en árbol del margen. Fíjate que podíamos haber obtenido la probabilidad pedida sin más que calcular el producto de las probabilidades de cada suceso del siguiente modo:

$$p(C \cap C \cap C) = p(C) \cdot p(C) \cdot p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

En los experimentos compuestos cada resultado viene dado por un camino del diagrama en árbol; si indicamos sobre cada rama su probabilidad, vemos que podemos obtener la probabilidad del camino multiplicando las probabilidades de cada una de sus ramas. Este es un importante resultado que se conoce como **regla del producto**, y dice así:

La probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

SE EXTRAEN DOS CARTAS



EJERCICIOS RESUELTOS

12 **Extraemos consecutivamente y sin devolución dos cartas de una baraja. Hallar la probabilidad de que ambas sean reyes.**

Mediante el diagrama en árbol obtenemos:

$$p(\text{obtener dos reyes}) = p(\text{rey}) \cdot p(\text{rey}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

Observa que, si se ha obtenido un rey en la primera extracción, para la segunda solo tenemos tres reyes y 39 cartas; de ahí que la probabilidad de obtener un rey en la segunda extracción sea $\frac{3}{39}$.

9 Dependencia e independencia de sucesos

En una bolsa hay 15 bolas rojas y 10 verdes. Extraemos dos bolas de la urna. Hallar la probabilidad de que ambas sean rojas:

a) Devolviendo la primera bola extraída. b) Sin devolverla.

Representamos por R_1 = «obtener bola roja en la primera extracción» y por R_2 = «obtener bola roja en la segunda extracción».

a) **Con devolución.** Según el diagrama en árbol del margen, tenemos:

$$p(\text{roja y roja}) = p(R_1 \cap R_2) = \frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{9}{25}$$

b) **Sin devolución.** Según el diagrama en árbol del margen, tenemos:

$$p(\text{roja y roja}) = p(R_1 \cap R_2) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} = \frac{7}{20}$$

En a, el resultado de la primera extracción no influye o condiciona el de la segunda; se dice que los **sucesos son independientes**.

En cambio en b, el resultado obtenido en la primera extracción condiciona el resultado de la segunda, ya que supuesto que se ha obtenido una bola roja, como no se devuelve, tenemos 14 bolas rojas y 24 bolas en total. Por ello se dice que los **sucesos son dependientes**. Escribimos entonces:

$$p(R_1 \text{ y } R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2, \text{ supuesto ocurrido } R_1)$$

La probabilidad $p(R_2$ supuesto ocurrido $R_1)$ se llama **probabilidad de R_2 condicionada a R_1** y se representa por $p(R_2/R_1)$.

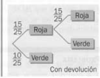
Si A y B son **independientes** se verifica:

$$p(A \text{ y } B) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Si A y B **son dependientes** se verifica:

$$p(A \text{ y } B) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

SUCESOS INDEPENDIENTES



SUCESOS DEPENDIENTES

EJERCICIOS RESUELTOS

13 **Extraemos de una baraja tres cartas. Hallar la probabilidad de que sean tres ases en los siguientes casos:**

a) Con devolución después de cada extracción.

b) Sin devolución.

Representamos por A = «obtener un as». Según los diagramas en árbol del margen, resulta:

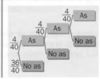
a) $p(\text{as y as y as}) = p(A \cap A \cap A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{1\,000}$

Los resultados de cada extracción no condicionan los siguientes; por ello, los sucesos son independientes.

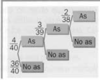
b) $p(\text{as y as y as}) = p(A \cap A \cap A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

Los sucesos son dependientes.

CON DEVOLUCIÓN



SIN DEVOLUCIÓN



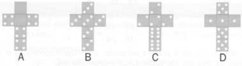
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema...

- Acotar las soluciones.
- Enunciar una conjetura y probarla.

PROBLEMA

El estadístico Bradley (Universidad de Stanford) diseñó estos dados:



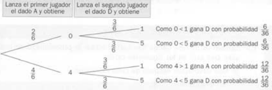
Un jugador escoge y lanza un dado; a continuación, un segundo jugador escoge y lanza otro dado. Gana el jugador que obtenga mayor número. ¿Quién tiene ventaja, el primer jugador o el segundo?

ACOTAR LAS SOLUCIONES

- Supongamos que el primer jugador escoge el dado A; tal y como están diseñados no parece que con los dados B o C se pueda ganar al dado A. En cambio, las caras de D sí parecen superiores a las de A.

ENUNCIAR LA CONJETURA Y PROBARLA

- Si el primer jugador escoge el dado A, el segundo jugador escoge el dado D y gana. Analicemos todas las posibilidades:



$$p(\text{gane A}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$p(\text{gane D}) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

En este caso tiene ventaja el jugador que escoge en segundo lugar.

Es importante destacar:

1.° En todos los casos tiene ventaja el que escoge en segundo lugar.

2.° El diseño de los dados es no transitivo, de tal manera que si A gana a B y B gana a C no se deduce que A gane a C.

A C T I V I D A D E S

Ejercicios para entrenarse

1 Sea el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 y consideremos los siguientes sucesos:

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{3, 4\}$
$C = \{5, 6\}$ $\quad D = \{3\}$

Halla:

$A \cup B \qquad A \cup C \qquad B \cup D \qquad B \cap C$

$A \cap B \qquad C \cap D \qquad \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$

2 Para los sucesos del ejercicio anterior, indica cuáles son compatibles y cuáles incompatibles.

3 En una bolsa se tienen ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se realiza el experimento que consiste en la extracción de una bola, anotar su número y devolverla a la bolsa. Consideremos los siguientes sucesos:

$A = \{3, 5, 7, 8\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\};$
$C = \{3, 6, 8\}$

Forma los sucesos:

$A \cap B \qquad B \cap A \qquad A \cap B \cap C \qquad \overline{A}, \overline{B}, y\ \overline{C}$

4 Si extraes una carta de una baraja española, calcula la probabilidad de que:

a) Sea un rey.
b) Sea un oro.
c) Sea el rey de oros.
d) Sea un rey o un oro.

5 Una bolsa A contiene 12 bolas verdes y 4 rojas, y otra bolsa B contiene 20 bolas verdes y 10 rojas. ¿En qué bolsa es más probable obtener una bola verde?

6 Imagínate que la probabilidad de nacer varón es 0,46. De una familia con tres hijos, calcula la probabilidad de que:

a) Los tres sean varones.
b) Ninguno sea varón.

7 En una bolsa se introducen 4 bolas azules, 4 rojas y 2 verdes. Se agita la bolsa y seguidamente se extraen tres bolas, de las que dos son rojas y una azul. A continuación se extrae otra bola. ¿Qué color es el que tiene mayor probabilidad de ser elegido?

8 ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar dos dados, salga, por suma, o bien 3, o bien 4, o bien 5?

9 Se lanzan al aire tres monedas. Determina la probabilidad de que se obtengan al menos dos cruces.

10 Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Sea roja o verde.
b) No sea roja.

11 Se lanzan simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea menor que 7.

12 Se ha trucado una moneda de tal forma que la probabilidad de obtener cara es triple que la probabilidad de obtener cruz. ¿Cuál es la probabilidad de cada suceso elemental?

13 Un dado está trucado de modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es directamente proporcional a los números de estas. Calcula:

a) La probabilidad de cada una de las caras.
b) La probabilidad de sacar un número par.

14 Un dado está trucado de modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es inversamente proporcional a los números de estas. Calcula:

a) La probabilidad de cada una de las caras.
b) La probabilidad de sacar un número múltiplo de 3.

ACTIVIDADES

15 Halla la probabilidad de un suceso sabiendo que la suma de su cuadrado y la del cuadrado de la probabilidad del suceso contrario es igual a $\frac{5}{9}$.

16 Halla la probabilidad de que la suma de los puntos de las caras visibles de un dado que se lanzó al azar sea múltiplo de 5.

17 Se lanzan tres dados al aire. Calcula la probabilidad de que se obtenga:

a) Un 4 en cada dado.
b) Una suma total de puntos igual a 8.

18 Sean A, B y C tres sucesos independientes tales que $p(A) = 0,2$, $p(B) = 0,8$ y $p(C) = 0,7$. Halla la probabilidad de los sucesos siguientes:
$A \cup B$, $A \cup C$.

19 Se extrae al azar una carta de una baraja española. Halla la probabilidad de que salga «un as o una copa».

20 Halla la probabilidad de obtener dos ases al extraer dos cartas de una baraja, si una vez extraída la primera se devuelve al mazo.

PROBLEMAS PARA APLICAR

21 A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan solo francés y 40 solo inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérpretes?

22 Se ha comprobado que en una ciudad están enfermos con diarrea el 60 % de los niños, con sarampión, el 50 %, y con ambas enfermedades, el 20 %.

a) Calcula la probabilidad de que, elegido un niño al azar, esté enfermo con diarrea, o sarampión, o con ambas enfermedades.
b) En un colegio con 450 niños, ¿cuántos cabe esperar que estén enfermos con diarrea o sarampión?

23 Un jugador expresó a Ga' orpresa al observar que, al jugar con s, la suma 10 aparece con más frecuencia a suma 9. ¿Hay razones para que sea así?

24 Un objeto está formado por tres partes, A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0,03, de un defecto en B es 0,04 y de un defecto en C es 0,08. ¿Cuál es la probabilidad de que el objeto no sea defectuoso?

25 Halla la probabilidad de obtener al menos un 6 doble en 10 tiradas de dos dados.

26 La probabilidad de que una bomba lanzada por un avión haga blanco en el objetivo es $\frac{1}{3}$. Halla la probabilidad de alcanzar el objetivo si se tiran tres bombas seguidas.

27 A un paciente se le aplican tres sueros independientes con probabilidades de éxito 0,90; 0,95 y 0,92. Halla la probabilidad de que el paciente se cure.

28 En el banquete de una boda se sientan en la presidencia 10 personas. Calcula la probabilidad de que los novios estuvieran juntos si se hubieran sentado al azar.

29 En una clase hay 24 chicas y 16 chicos. Se quiere formar una comisión compuesta por dos personas. Para ello se escriben en tarjetas los nombres de cada uno de los alumnos, se introducen en una bolsa y se extraen a continuación dos tarjetas. Halla la probabilidad de que:

a) Sean dos chicas.
b) Sean dos chicos.
c) Sean una chica y un chico.

30 Un estudiante de historia busca en tres libros una pirámide de población que necesita para un trabajo. Las probabilidades de encontrarla en el primero, segundo o tercero son, respectivamente, 0,5; 0,6 y 0,7. Halla la probabilidad de que la encuentre:

a) Solamente en un manual.

b) Únicamente en dos manuales.

c) En los tres manuales.

31 Halla la probabilidad de ganar dos de tres juegos independientes, si la probabilidad de ganar cualquiera de ellos es 0,01.

32 La probabilidad de que una persona sea rubia es 0,4, y la probabilidad de que tenga los ojos negros es 0,3. Calcula las siguientes probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Que sea rubia y tenga los ojos negros.

b) Que sea rubia o tenga los ojos negros.

c) Que sean tres personas rubias.

33 Para la señalización de emergencia de un colegio se han instalado tres indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador funcione cuando se produce la avería es 0,99 para el primero de ellos y 0,95 para el segundo. Halla la probabilidad de que durante la avería funcione solamente uno.

34 La probabilidad de que un hombre y una mujer de 18 años vivan 50 años más es 0,6 y 0,7, respectivamente. Calcula la probabilidad de que, pasados los cincuenta años:

a) Vivan ambos.

b) Viva solo la mujer.

c) Viva al menos uno de los dos.

d) No viva ninguno de los dos.

35 Un opositor ha preparado 10 de los 14 temas de que consta el programa de la asignatura. Se eligen al azar tres temas. Calcula la probabilidad de que conteste bien:

a) Exactamente a dos temas.

b) A dos temas por lo menos.

Cuestiones para aclararse

36 En la extracción de una carta de una baraja se consideran los siguientes sucesos:

A = «sacar una espada».

B = «sacar una figura».

Explica si son compatibles o incompatibles.

37 Indica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones poniendo un ejemplo que aclare tus respuestas:

a) Si dos sucesos son contrarios entonces son compatibles.

b) Si dos sucesos son incompatibles entonces son contrarios.

38 Se efectúa un experimento que consiste en el lanzamiento de 2 dados y la extracción de una carta de una baraja española. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral del experimento compuesto?

39 Si lanzas al aire 12 monedas y repites muchas veces el experimento, ¿cuál de los siguientes sucesos se producirá más a menudo?

A = «2 caras y 10 cruces».

B = «5 caras y 7 cruces».

40 ¿Puede ser negativa la probabilidad de un suceso? ¿Y mayor que la unidad? Razona la respuesta.

41 Lanzamos dos dados y solo anotamos su suma; el espacio muestral es

E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

¿Son todos los sucesos elementales equiprobables?

42 Se sabe que la probabilidad de un suceso es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?

ACTIVIDADES

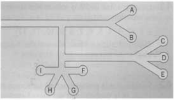
43 Si dos sucesos son dependientes, para calcular la probabilidad de su intersección, ¿hay que tener en cuenta lo ocurrido en el primer suceso para calcular la probabilidad del segundo? ¿Y si son independientes?

ACTIVIDADES PARA PROFUNDIZAR

44 En un centro escolar, los alumnos pueden optar, por cursar como lengua extranjera, entre inglés o francés. En un determinado curso, el 90 % estudia inglés, y el resto, francés. El 30 % de los que estudian inglés son varones, y de los que estudian francés, son chicos el 40 %. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

45 Un psicólogo de una empresa de seguros del ramo del automóvil ha estudiado el comportamiento de los asegurados cuando conducen, ya estén sobrios o ebrios, y ha constatado que la probabilidad de que un conductor sobrio tenga un accidente es 0,001, y la probabilidad de que lo tenga un conductor ebrio es 0,5. Por otra parte, ha detectado que la probabilidad de conducir borracho es 0,01. Halla la probabilidad de que se produzca un accidente y que al hacer la prueba de alcoholemia al conductor dé positivo.

46 Un robot empieza a explorar un laberinto. Los caminos que salen de cada bifurcación son equiprobables (excepto que no se puede retroceder). Al final de cada camino hay una trampa. ¿En cuál de las trampas es más probable que acabe el robot, o son todas las trampas igualmente probables?



47 Una persona despistada ha escrito 4 cartas y sus correspondientes sobres, pero a la hora de guardar las cartas en los sobres lo hace tan atolondradamente que podemos considerar que sigue la ley de azar. Halla la probabilidad de que cada carta esté en su sobre correspondiente.

48 Un grupo de 24 amigos tienen la costumbre de celebrar sus cumpleaños invitándose todos. Como solo se puede acudir en el mismo día a una sola fiesta, ¿cuál es la probabilidad de no poder asistir a alguna fiesta debido a la coincidencia de fechas de nacimiento?

49 Dos equipos juegan a la pelota. El equipo que primero marque 5 goles gana el premio, un millón de pesetas. Se supone que los dos equipos son igual de buenos. Debido a la lluvia se suspende cuando el marcador señala 4-3. ¿En qué proporción debe repartirse el premio con justicia según las probabilidades que quedan de ganar?

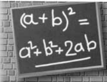
50 Observa los dados no transitivos de Bradley que vimos en la página de resolución de problemas de esta unidad y contesta a estas preguntas:

a) Si el primer jugador escoge el dado B, ¿qué dado deberá escoger el segundo jugador?

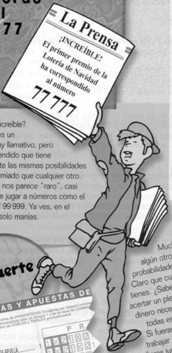
b) Si el primer jugador escoge el dado C, ¿qué dado deberá escoger el segundo jugador?

c) Si el primer jugador escoge el dado D, ¿qué dado deberá escoger el segundo jugador?

MURAL DE MATEMÁTICAS



El Gordo al 77 777



¿Por qué increíble? El 77 777 es un número muy llamativo, pero ya has aprendido que tiene exactamente las mismas posibilidades de salir premiado que cualquier otro. Pero como nos parece "raro", casi nadie quiere jugar a números como el 00 001 o el 99 999. Ya ves, en el fondo son solo manías.

Dados y cartas

La afición a los dados y a las cartas (a las de escribir, no a las de jugar) de un noble y de dos matemáticos están en el origen de la moderna teoría de la probabilidad.

Antonio Gombard, un noble francés que vivió en el siglo XVII y era conocido como el Caballero de Mère, era muy aficionado a jugar a los dados. Le gustaba observar y apuntar con qué frecuencia obtenía unos u otros resultados al tirarlos.

En una ocasión escribió a su amigo, el famoso matemático Blas Pascal, comentándole algunas de sus observaciones. Pascal se interesó pronto por el asunto y a su vez se las transmitió por carta a su colega Pierre de Fermat.

Las cartas cruzadas entre los tres (el caballero jugador y los curiosos matemáticos) es el origen de la moderna teoría de la probabilidad. ¡Para que luego digan que jugar es perder el tiempo!

La suerte fija

Mucha gente sueña con que le toque la Lotería Primitiva o algún otro juego de azar. Todos podemos soñar, pero la teoría de probabilidades nos demuestra que nuestras opciones son pocas. Claro que cuantos más boletos distintos rellenes, más posibilidades tienes. ¿Sabes cuántas apuestas necesitarías para estar seguro de acertar un pleno? 13 983 816 de apuestas distintas. Imagínate cuánto dinero necesitarías y, lo que es casi peor, cuánto tiempo para escribir todas esas apuestas.

Si fueras capaz de rellenar un boleto cada 15 segundos, necesitarías trabajar sin parar durante seis años y medio para tenerlos todos.

Si prefieres jugar a las quinielas y quieres asegurarte un premio de quince tendrías que hacer 14 348 907 columnas.

Un poco de sentido común

Pierre Simon Laplace enunció, en el siglo XVIII, la primera definición del concepto de probabilidad, que ya has visto en las páginas anteriores.

Este mismo personaje dijo algunas otras cosas interesantes sobre la probabilidad.

Por ejemplo, afirmaba que **"en el fondo, la teoría de probabilidades es solo sentido común expresado con números"**.

Y reconocía que **"lo que conocemos es poca cosa, y lo que ignoramos, numeroso"**.

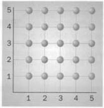
A c t i v i d a d e s

1 Nueve bolas numeradas del 1 al 9 se encuentran en una urna. Se extrae una bola al azar; halla la probabilidad de que la bola extraída sea:

a) par; b) impar; c) mayor que 5; d) menor que 6; e) 9.

2 Se lanzan un dado y una moneda. Forma el espacio muestral y halla las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Sacar cara en la moneda.
b) Sacar menor de 4 en el dado.
c) Sacar cara en la moneda y menor de 4 en el dado.



3 Sea S el conjunto de 25 pares ordenados que son las coordenadas de los 25 puntos que muestra la figura del margen. Si un par ordenado (x, y) es escogido al azar del conjunto S, halla la probabilidad de que:

a) $x + y = 4$; b) $x + y < 5$; c) ni x ni y sean 5; d) $y > x$.

4 Sea 0,152 la probabilidad de ser hospitalizado durante un año. Si se supone que la hospitalización de un miembro de una familia es independiente de la de los otros, halla la probabilidad de que en una familia formada por 8 miembros ninguno de ellos sea hospitalizado a lo largo de un año. ¿Te parece razonable la suposición de independencia?

5 Supongamos que el 4 % de las mujeres tiene los ojos azules y que el 1 % de los hombres también tiene los ojos azules. Si en una población el 60 % de las personas son mujeres, calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar:

a) Sea mujer con ojos azules. b) Tenga los ojos azules.

6 Una urna contiene 2 bolas rojas, 3 verdes y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar, halla las probabilidades de los siguientes sucesos, primero con devolución y después sin devolución:

a) Una sea roja y la otra verde. b) Las dos sean del mismo color.

7 Si la probabilidad de nacer varón en una familia es $\frac{4}{9}$, ¿cuál es la probabilidad de que en una familia de tres hijos los tres sean varones?

8 En una urna hay 11 bolas, tales que en cada una de ellas figura una letra de la palabra MATEMÁTICAS. Se extrae cinco veces seguidas una bola. Halla la probabilidad de que se obtengan las bolas en el orden de la palabra MATES, considerando las extracciones primero con devolución y después sin devolución.

9 Dados los cinco números: 20, 35, 50, 60 y 85, añade 4 números a la lista para que la media y el rango de los nueve números sean iguales a los de los cinco primeros.

de síntesis

10 Se ha encuestado a 64 familias sobre el número de hijos que tienen y se han obtenido los siguientes datos: 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 6, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 6, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 7 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 8, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 8, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 9.

a) Efectúa el recuento construyendo una tabla de frecuencias.
b) Representa gráficamente la distribución.
c) Halla la media, la mediana, y la moda.
d) Halla el rango, la varianza y la desviación típica.
e) Estudia el porcentaje de individuos que se encuentra en cada uno de los intervalos:

$$(\bar{x} - s, \bar{x} + s); \quad (\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s); \quad (\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$$

(Puedes utilizar una hoja de cálculo para resolver el ejercicio.)

11 Los siguientes datos proporcionan la población en millones de las 35 áreas urbanas más pobladas:

16,2 7,8 7,0 5,4 4,4 3,8 3,1 9,3 7,4 6,0 4,7 4,1 3,2 3,0
11,3 7,7 7,0 5,0 4,3 3,7 3,1 8,6 7,3 5,5 4,6 4,1 3,1 2,9
10,8 7,6 7,0 4,8 4,3 3,2 3,1

a) Construye una tabla de frecuencias tal que la primera clase tenga de extremos (2, 4) y las restantes tengan la misma amplitud.
b) Representa gráficamente la distribución.
c) Halla la media, la mediana, la moda, el rango y la desviación típica.

(Puedes utilizar una hoja de cálculo para resolver el ejercicio.)

12 Una encuesta sobre las vacaciones que se toman al año 2 000 altos ejecutivos viene representada en el diagrama de sectores del margen.

a) Refleja los datos en una tabla de frecuencias, dando las vacaciones en días.
b) Halla la media y la desviación típica de esta distribución.

13 La tabla siguiente muestra las edades de 40 personas:

Edad	20	21	22	23	24	25	26	27
Número de personas	6	3	0	4	6	3	8	10

a) Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias absolutas.
b) Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias acumuladas.
c) Halla la edad media y la varianza.

(Puedes utilizar una hoja de cálculo para resolver el ejercicio.)

14 Un grupo de 10 jóvenes, entre 13 y 19 años de edad, tiene media 17,1 años, mediana 16,5 años y moda 16 años.

Si un chico de 21 años se une al grupo, ¿cuáles serán los nuevos valores de la media, la mediana y la moda?

(Puedes utilizar una hoja de cálculo para resolver el ejercicio.)

PROYECTO DIDÁCTICO
Santiago Gutiérrez

AUTORES
José Ramón Vizmanos, Máximo Anzola

SECCIÓN «MURAL DE MATEMÁTICAS»
Javier Lascurain (colaboración literaria), Gerardo Amechazurra (dibujos)

REVISIÓN CIENTÍFICA Y PEDAGÓGICA
Santiago Gutiérrez, Vicente Rivière, Javier Muñoz

DISEÑO DE INTERIORES
Alfonso Ruano, José Luis Rodríguez

DISEÑO DE CUBIERTA
Alfonso Ruano, Pablo Núñez

MAQUETA
José Ugarte

DIBUJOS
Modesto Arregui, José Luis Rodríguez, Jacinto Rodríguez, Antonia Santolaya

FOTOGRAFÍAS
Javier Calbet, Archivo SM, Yolanda Álvarez, Sonsoles Prada, J. M. Navia, Pedro Carrión, PAISAJES ESPAÑOLES, AGE FOTOSTOCK, EFE, Simón Ward-ALL SPORT/FIRO FOTO, Peltola/SIPA PRESS, Diego Lezama, Mónica Porres/STOCK PHOTOS

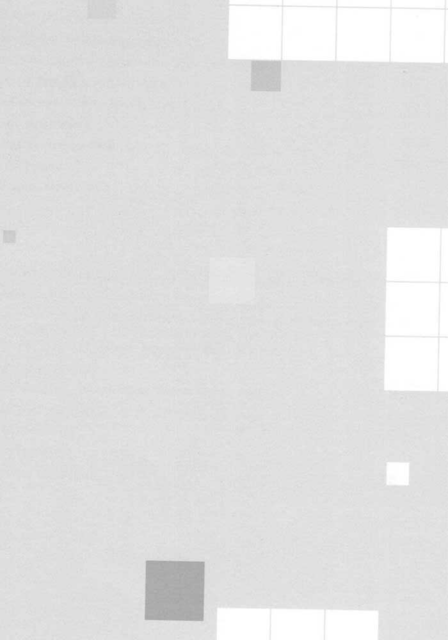
COORDINACIÓN TÉCNICA
Almudena Montejano, Javier Muñoz, Vicente Rivière, Pilar Ruiz

COORDINACIÓN EDITORIAL
Santiago Gutiérrez

DIRECCIÓN EDITORIAL
Fátima Senante Lamaignère

Este libro corresponde al segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, área de Matemáticas, y forma parte de los materiales curriculares del proyecto editorial de Ediciones SM, que ha sido presentado para ser debidamente supervisado y autorizado.

ISBN: 84-348-8287-6 / Depósito legal: NA-1852-2002 / Preimpresión: Grafilia, SL
Gráficas Estella - Ctra. de Estella a Tafalla, km 2 - Estella (Navarra) / Impreso en España - *Printed in Spain*



Comercializa
cesma sa

ISBN 84-348-8287-6
9 788434 882874
60354